SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GEORGE CIUCU GABRIEL SÎMBOAN

TEORIA PROBABILITĂŢILOR ŞI STATISTICĂ MATEMATICĂ

Culegere de probleme

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI — 1962

Lucrarea conține probleme cu indicații și răspunsuri referitoare la : evenimente, probabilități, legi de repartiție, repartiții cu mai multe dimensiuni, momente, dispersii, corelații, funcții caracteristice ale repartițiilor uzuale, convergența șirurilor de variabile aleatoare, procese stochastice, teoria selecției, teoria esimației etc.

Fiecare capitol este precedat de o scurtă prezentare a noțiunilor de bază, utilizate în capitolul respectiv.

Cartea se adresează studenților de la facultățile de matematică și fizică, economie și planificare, și studenților din institutele politehnice, precum și cadrelor didactice, și tuturor acelora care prin natura ocupațiilor lor trebuie să facă apel la teoria probabilităților și statistica matematică.

Pentru orice observații, propuneri și sugestii cititorii sînt rugați să se adreseze Editurii Tehnice, București Oficiul Poștal nr. 45, str. Știrbei Vodă nr. 37.

PREFAȚĂ

Această culegere de exerciții și probleme cuprinde șapte capitole și anume: șase de Calculul probabilităților și unul de Statistică matematică. Exercițiile și problemele din calculul probabilităților se referă la evenimente și probabilități, probabilități geometrice, funcții de repartiție, valori caracteristice, convergența șirurilor de variabile aleatoare și lanțuri Markov. Capitolul de Statistică matematică cuprinde probleme și exerciții privind teoria selecției, teoria estimației, regiunile de încredere, teoria corelației și teoria asigurărilor. Toate exercițiile și problemele au soluții complete, numeroase au aplicații practice imediate.

Fiecare capitol este precedat de o scurtă prezentare a principalelor notații și definiții utilizate. Pentru o înțelegere mai profundă, propunem cititorilor să studieze capitolele respective din tratatele: Calculul probabilităților de O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu-Tulcea, Editura Academiei R.P.R., 1956, Calculul probabilităților de O. Onicescu, Editura Tehnică, 1956, și Lecții de statistică matematică de O. Onicescu, G. Mihoc, Editura Tehnică, 1958.

Exercițiile și problemele au fost luate din diferite lucrări, menționate în bibliografie. Indeosebi am folosit valorosul „Manual de învățămînt superior" „Valószinüségszámitás" al prof. Rényi Alfréd din Budapesta.

Sîntem convinși că această culegere va fi utilă acelora care vor să se consacre studiului Calculului probabilităților și Statisticii matematice.

Aducem mulțumirile noastre prof. O. Onicescu și prof. G. Mihoc, pentru ajutorul și îndrumările pe care ni le-au dat.

AUTORII

CÎMPURI FINITE. CÎMPURI NUMERABILE. PROBABILITĂȚI GEOMETRICE

1. **Introducere.** Printre diferitele discipline matematice, un rol de frunte, în cunoașterea lumii reale, îl are teoria probabilităților. Aplicațiile teoriei probabilităților și ale concepțiilor statistice în fizică, chimie, astronomie, biologie și tehnică, ne-au arătat cît de importantă este această disciplină. Problemele de telefonie, de mișcare turbulentă, de cristalizare a metalelor, problemele legate de structura atomică a materiei, duc inevitabil la folosirea celor mai noi metode din teoria probabilităților. Un studiu amănunțit al lumii exterioare are la bază concepțiile statistice și probabilistice.

Dezvoltarea teoriei probabilităților a fost mult timp oprită de curentele filozofice reacționare care negau rolul noțiunii de eveniment întîmplător, noțiune care, după cum știm, stă la baza teoriei probabilităților, negau importanța metodelor statistice în cunoașterea lumii exterioare. Numai în cadrul filozofiei marxist-leniniste, teoria probabilităților s-a putut dezvolta ca o știință matură, bine închegată din punct de vedere logic, și aceasta datorită școlii sovietice de calculul probabilităților.

In această parte vom defini riguros probabilitatea, vom expune pe scurt definiția clasică și empirică a probabilității și vom insista asupra definiției axiomatice dată de academicianul A. N. Kolmogorov.

Să spunem, însă, de la început că nu trebuie să privim fenomenul întîmplător ca ceva ce apare foarte rar, ca ceva neesențial, ca ceva ce vine în contradicție cu o lege determinată. Studiul fenomenelor întîmplătoare nu poate fi considerat fără conținut, deși reprezintă un interes de cunoaștere destul de limitat. Acest studiu ne duce însă la aprofundarea condițiilor de apariție a unui fenomen. Nu trebuie să se creadă că teoria probabilităților studiază

numai evenimentele întîmplătoare: ea este o știință matematică a fenomenelor de masă.

2. **Definiția clasică a probabilității.** Această definiție este specifică secolelor al XVIII-lea și al XIX-lea. *Probabilitatea unui eveniment* era definită ca *raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile, presupuse toate egal posibile.* De exemplu, dacă avem un zar omogen, cub perfect, nici o față neavînd un avantaj asupra celeilalte, atunci probabilitatea de a ne apărea unul dintre numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 este 1/6. 1 reprezintă numărul cazurilor favorabile, iar 6 numărul cazurilor posibile. Probabilitatea ca într-o aruncare a zarului să apară un număr par, adică să apară unul dintre numerele 2, 4, 6 este, conform cu definiția precedentă, $3/6=1/2$. In general, probabilitatea unui eveniment care poate fi încadrat în condițiile acestei definiții este numărul rațional m/n, unde m este numărul cazurilor favorabile evenimentului, iar n numărul cazurilor posibile.

Definiția clasică poate fi folosită în multe probleme, deși este criticabilă din unele motive.

3. **Definiția empirică a probabilității.** Această definiție a fost dată cu scopul de a înlătura lipsurile definiției clasice și de a obține o definiție aplicabilă în statistică.

Să considerăm o experiență care poate da naștere la mai multe rezultate, $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Dacă repetăm experiența de n ori și dacă rezultatul x_j a apărut de m ori, atunci *raportul*

$$f=m/n$$

se numește frecvența rezultatului x_j în cele n probe. Mises și elevii săi au definit *probabilitatea ca să se producă rezultatul x_j ca o limită a frecvenței f cînd n tinde la infinit.*

Această definiție părea că este justă. S-a dovedit însă că este din punct de vedere logic slabă și idealistă. După Mises, un obiect nu are dimensiuni, dacă șirul de măsurători făcute pentru a-i determina dimensiunile nu tinde către o limită. Această definiție pierde astfel caracterul obiectiv, este strîns legată de filozofia lui Mach, Mises însuși recunoscînd acest lucru.

4. **Definiția axiomatică a probabilității.** Singura definiție corectă a noțiunii de probabilitate este definiția axiomatică, formulată pentru prima dată în mod amplu de A. N. Kolmogorov în lucrarea „Noțiunile fundamentale ale calculului probabilităților“ [1])

[1]) *A. H. Колмогоров*, Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.

şi utilizată de atunci, mereu, de către şcoala sovietică de calculul probabilităţilor. Această definiţie elimină deficienţele, atît ale definiţiei clasice cît şi ale definiţiei lui Mises.

Din punct de vedere principial, cea mai naturală definiţie este aceea dată de V. I. Glivenko [1]). In teoria lui Glivenko evenimentele sînt interpretate într-o algebră booleană, iar probabilitatea este o funcţie additivă, nenegativă, definită pentru elementele acestei algebre, egală cu 1 pentru elementul unitate al algebrei şi cu 0 pentru elementul nul al algebrei.

In legătură cu definiţia lui V. I. Glivenko, B. V. Gnedenko şi A. N. Kolmogorov arată în „Treizeci de ani de matematică sovietică" [2]), în articolul despre calculul probabilităţilor, că este prea complicată.

Marele succes al teoriei lui A. N. Kolmogorov, pe care o vom expune, se explică prin aceea că ea

a) este cea mai simplă dintre toate teoriile:

b) cuprinde într-o singură schemă atît capitolele clasice cît şi cele moderne din teoria probabilităţilor;

c) leagă teoria probabilităţilor de probleme adînc studiate din teoria funcţiilor de variabilă reală, permiţînd în acest mod folosirea la calculul probabilităţilor a celor mai riguroase metode matematice.

5. **Mulţimi de evenimente.** Să presupunem că facem o experienţă şi să notăm cu F mulţimea evenimentelor posibile care pot rezulta în urma acestei experienţe.

Este natural ca:

a) în mulţimea F să se găsească evenimentul care se verifică sigur în urma realizării experienţei; vom nota acest eveniment cu I şi îl vom numi *evenimentul sigur*;

b) dacă A şi B sînt două evenimente din mulţimea F, atunci şi evenimentul care constă în verificarea sau a evenimentului A sau a evenimentului B să aparţină mulţimii F şi de asemenea şi evenimentul care constă atît în realizarea evenimentului A cît şi în realizarea evenimentului B să aparţină mulţimii F.

Aceste două evenimente le vom nota respectiv prin $A \cup B$ şi $A \cap B$;

c) dacă evenimentul A aparţine mulţimii F, atunci şi *evenimentul opus (contrar sau complementar) lui A*, adică şi evenimentul care constă în nerealizarea lui A aparţine lui F.

Acest eveniment îl vom nota prin $\bar{A}$ sau CA.

---

[1]) *Гливенко В. И.*, Курс теории вероятностей, ГОНТИ, 1939.

[2]) Математика в СССР за тридцать лет, ОГИЗ, 1948.

Pentru simplificarea considerentelor matematice care vor urma, vom presupune întotdeauna că *evenimentul imposibil*, care va fi notat $\emptyset$, aparţine lui F.

O mulţime de evenimente în care condiţiile (a), (b) şi (c) sînt verificate se numeşte *cîmp finit de evenimente*. Dacă condiţia (b) este extinsă la un număr numerabil de evenimente, atunci cîmpul de evenimente se numeşte *cîmp borelian*.

Să reluăm experienţa considerată la punctul 2, aruncarea zarului. Să notăm evenimentul care constă în apariţia unuia dintre numerele i, j, k, prin $\{i, j, k\}$. Cu această notaţie, $\{2, 4, 6\}$ este evenimentul care constă în apariţia unui număr par; evenimentul $\{1\}$ este evenimentul care constă în apariţia numărului 1. Mulţimea F a tuturor evenimentelor posibile este formată din totalitatea părţilor mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, inclusiv partea care nu conţine nici un element (partea vidă).

i) Evenimentul *sigur* este evenimentul $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ii) Dacă considerăm evenimentele $A=\{1, 2, 3\}$ şi $B=\{2, 4, 6\}$, evenimentul $A \cup B$ este evenimentul care constă în apariţia unuia dintre numerele 1, 2, 3, 4, 6, adică evenimentul $\{1, 2, 3, 4, 6\}$; evenimentul $A \cap B$ este evenimentul $\{2\}$.

iii) Evenimentul opus evenimentului $\{1, 4\}$ este evenimentul $\{2, 3, 5, 6\}$.

Să revenim la o experienţă generală determinată şi la mulţimea F de evenimente corespunzătoare.

Două evenimente, A şi B, se zic *incompatibile*, dacă nu se pot realiza în acelaşi timp. Prin urmare, evenimentele A şi B sînt incompatibile, dacă realizarea lor simultană este echivalentă cu realizarea evenimentului imposibil. Conform cu notaţiile introduse mai înainte, aceasta se poate exprima prin relaţia $A \cap B=\emptyset$. Evenimentele A şi $\bar{A}$ sînt, evident, incompatibile.

Dacă realizarea evenimentului A implică realizarea evenimentului B, vom spune pe scurt că *evenimentul A implică evenimentul B*. Vom nota aceasta prin $A \subset B$. Este evident că, dacă A este un eveniment oarecare din mulţimea F şi I, evenimentul sigur, atunci în mod necesar $A \subset I$.

Pentru clarificarea noţiunii de eveniment să introducem o definiţie a evenimentului elementar:

Un eveniment A îl vom numi elementar dacă oricare ar fi evenimentul B din mulţimea F, sau $A \subset B$ *sau* $A \cap B=\emptyset$; adică sau evenimentul A implică evenimentul B sau cele două evenimente sînt incompatibile.

In experienţa considerată mai înainte, a aruncării cu zarul, evenimentele $\{1, 2, 3\}$ şi $\{4, 5\}$ sînt incompatibile; eveni-

mentul (1, 2) implică evenimentul $\{1, 2, 6\}$ nu şi invers; evenimentele elementare sînt evenimentele $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. În rezumat, putem spune că mulţimea de evenimente F, corespunzătoare unei experienţe date, formează un cîmp finit de evenimente dacă are următoarele proprietăţi:

j) mulţimea F conţine evenimentul I şi evenimentul $\emptyset$;

jj) dacă evenimentele A şi B aparţin lui F, evenimentele $A \cup B$ şi $A \cap B$ aparţin lui F;

jjj) evenimentele A şi $\bar{A}$ aparţin în acelaşi timp mulţimii F.

Dacă F conţine un număr infinit de evenimente este necesar să se presupună că F este cîmp borelian. Atunci, împreună cu orice şir de evenimente $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ din F, şi evenimentul care constă în realizarea a unuia cel puţin dintre aceste evenimente aparţine lui F; acest eveniment se notează $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Evenimentul care constă în realizarea fiecărui eveniment A_n se notează $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

6. Probabilitatea. După A. N. Kolmogorov, *probabilitatea este o funcţie „P", definită pe cîmpul de evenimente F, ale cărei valori sînt numere reale şi pozitive şi care are următoarele proprietăţi:*

a) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ pentru orice eveniment A;

b) $P(I)=1$;

c) dacă A şi B sînt două evenimente şi $A \cap B=\emptyset$, atunci

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B).$$

În cazul în care nu avem decît un număr finit de evenimente în mulţimea F, este evident că fiecare eveniment apare ca o „reuniune" de evenimente elementare. Din proprietatea (c) a probabilităţii se deduce imediat, în acest caz, că probabilitatea este determinată dacă este cunoscută probabilitatea pentru evenimentele elementare.

De exemplu, în cazul aruncării cu zarul, proprietatea unui eveniment elementar (j), este $1/6$; probabilitatea evenimentului (i, j, k) este $1/6+1/6+1/6$.

d) *Axioma de continuitate:* dacă cîmpul F este borelian, atunci pentru orice şir de evenimente $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ cu proprietatea $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\emptyset$

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n)=0.$$

7. **Probabilitatea geometrică.** Să considerăm în plan (sau în spațiu) o parte G măsurabilă și în ea o parte g măsurabilă; *prin definiție, probabilitatea p ca un punct ales la întîmplare în G să aparțină părții g* este:

$$p = \frac{\text{măsura } g}{\text{măsura } G}.$$

In acest caz, părțile măsurabile ale mulțimii G formează mulțimea de evenimente; G este evenimentul sigur și mulțimea vidă este evenimentul imposibil.

Probabilitatea definită mai sus satisface condițiile a), b) c) și d) și se numește *probabilitate geometrică.*

8. **Probabilitatea condiționată.** Dăm aici cîteva considerații privind probabilitatea condiționată și evenimentele independente.

Să considerăm evenimentele $A=\{2, 4, 6\}$ și $B=\{1, 2\}$. *Definiția probabilității condiționate* a evenimentului A în raport cu evenimentul B este construită astfel, încît această probabilitate să dea o indicație cantitativă privind apariția evenimentului A, atunci cînd știm că evenimentul B s-a realizat. Probabilitatea condiționată se notează $P_B(A)$ și se definește prin egalitatea:

$$P_B(A) = P(A \cap B) / P(B). \qquad (1)$$

Pentru evenimentele considerate mai înainte, obținem

$$P_B(A) = \frac{1}{2};$$

adică probabilitatea ca să se realizeze evenimentul care constă în apariția unui număr par, cînd știm că s-a realizat evenimentul care constă în apariția unuia dintre numerele 1 sau 2, este 1/2.

Dacă realizarea evenimentului B nu schimbă cu nimic probabilitatea condiționată a evenimentului A, se spune că cele două evenimente sînt *independente.* Conform cu relația (1), *evenimentele A și B sînt independente dacă și numai dacă*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Din definiția (1) a probabilității condiționate se deduce imediat formula lui Bayes:

$$P_A(B) = \frac{P(B)\,P_B(A)}{P(A)}$$

care ne dă posibilitatea să calculăm probabilitatea condiționată $P_A(B)$, atunci cînd cunoaștem probabilitatea condiționată $P_B(A)$

Dacă evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formează o *desfacere* a evenimentului sigur I în n evenimente $\left(I=\bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_j \cap A_k=\emptyset,\ j\neq k\right)$, atunci pentru orice eveniment A avem egalitatea:

$$P(A)=P(A\cap A_1)+P(A\cap A_2)+\ldots+P(A\cap A_n);$$

ţinînd seamă de egalitatea

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A),$$

dedusă din (1), avem

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(A)+\ldots+P(A_n)\cdot P_{A_n}(A). \quad (1')$$

După definiţia (1), a probabilităţii condiţionate, avem

$$P_A(A_j)=\frac{P(A\cap A_j)}{P(A)}$$

sau înlocuind $P(A)$ cu expresia (1'), obţinem

$$P_A(A_j)=\frac{P(A\cap A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P_{A_i}(A)};$$

şi această egalitate se numeşte tot formula lui Bayes.

PROBLEME

1. Un număr de telefon este compus din şase cifre. Să se determine probabilitatea P ca toate cifrele să fie diferite una de alta. Fiecare cifră poate avea una din valorile 0, 1, 2, ..., 9.

Soluţie. Numărul numerelor de telefon formate cu cifre diferite este A_{10}^6.

Numărul numerelor formate cu şase cifre (cifrele putîndu-se repeta) este

$$a_{10}^6=10^6,$$

unde a_{10}^6 este numărul aranjărilor cu repetiţie a 10 obiecte luate cîte 6.

Probabilitatea cerută este

$$p=\frac{A_{10}^6}{a_{10}^6}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^6}=0{,}1512.$$

2. Într-un oraș există 10 000 de biciclete numerotate de la 1 pînă la 10 000. Care este probabilitatea ca numărul primei biciclete întîlnite să nu conțină cifra 8?

Soluție. Vom număra toate bicicletele în al căror număr nu intră cifra 8.

Un număr de bicicletă va fi scris cu patru cifre inclusiv zerouri, de exemplu

4358, 0021, 0008 etc.

Numerele de bicicletă fără cifra 8 sînt formate cu cifrele

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9,

luate cite 4. Numărul cazurilor favorabile este $\mathcal{A}_9^4$, iar numărul cazurilor posibile este $\mathcal{A}_{10}^4$.

Rezultă că probabilitatea cerută este

$$p=\frac{\mathcal{A}_9^4}{\mathcal{A}_{10}^4}=\frac{9^4}{10\,000}=\left(\frac{9}{10}\right)^4=(0{,}9)^4=0{,}6561.$$

3. Un lift urcă cu k persoane într-o clădire cu n etaje. Care este probabilitatea ca la un etaj să coboare cel mult o persoană?

Soluție. Se presupune că toate modurile de grupare a oamenilor din lift sînt egal probabile. Dacă $n<k$, probabilitatea cerută este nulă. Dacă $n\geqslant k$, cele k persoane pot coborî din lift în n^k moduri, deci numărul total al cazurilor este n^k. Cîte un pasager la fiecare etaj poate coborî în A_n^k moduri. Deci

$$p=\begin{cases}\dfrac{A_n^k}{n^k}, & \text{dacă } k\leqslant n\\ 0, & \text{dacă } k>n.\end{cases}$$

Dacă $n=10$ și $k=7$, atunci

$$p=\frac{A_{10}^7}{10^7}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10^7}=0{,}060.$$

4. Din 100 mere, 10 sînt stricate. Scoatem la întîmplare 5 mere. Care este probabilitatea ca între cele 5 să fie mere stricate?

Soluție. Probabilitatea ca să scoatem cinci mere bune este $\frac{C_{90}^5}{C_{100}^5}$. Evenimentele „toate cele 5 mere sînt bune" și „între cele 5

cel puțin un măr este stricat" fiind evenimente complementare, probabilitatea cerută este:

$$1-\frac{C_{90}^{5}}{C_{100}^{5}}.$$

5. Numerele 1, 2, 3, ..., n se așază la întîmplare. Să se determine probabilitatea ca numerele 1 și 2 să fie așezate în șir în ordine crescătoare, consecutive.

Soluție. Cele n numere se pot scrie în $n!$ moduri. Grupul de numere $\{1, 2\}$ se poate scrie în $n-1$ locuri, în șirul celor n numere. Alături de cele două numere $\{1, 2\}$ celelalte $n-2$ numere se pot scrie în $(n-2)!$ moduri.

Numărul cazurilor posibile este $n!$, iar acela al cazurilor favorabile este $(n-2)!\,(n-1)$.

Probabilitatea cerută este deci

$$p=\frac{(n-2)!\,(n-1)}{n!}=\frac{1}{n}.$$

6. O urnă conține N bile dintre care a sînt albe. Se extrag succesiv trei bile. Se cere să se determine probabilitatea pentru ca cele trei bile să fie albe.

Soluție. Probabilitatea ca prima bilă extrasă să fie albă este $\frac{a}{N}$; probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albă este

$$\frac{a-1}{N-1},$$

iar probabilitatea ca a treia bilă extrasă să fie albă este

$$\frac{a-2}{N-2}.$$

Extracțiile fiind independente între ele, rezultă că probabilitatea cerută este

$$p=\frac{a\,(a-1)\,(a-2)}{N\,(N-1)\,(N-2)}.$$

7. O urnă conține 41 bile albe și 21 bile negre. O persoană scoate bilele una cîte una pînă cînd obține 14 bile albe. Să se determine valoarea medie a numărului de bile negre extrase.

Soluție. Sîntem în cazul schemei bilei neîntoarse. Probabilitatea de a scoate 14 bile albe și k bile negre este dată de:

$$p=\frac{C_{41}^{14}C_{21}^{k}}{C_{62}^{14+k}},$$

iar valoarea medie a numărului de bile negre extrase este:

$$M = C_{41}^{14} \sum_{k=0}^{21} k \frac{C_{21}^{k}}{C_{62}^{14+k}}.$$

8. La un strung s-au prelucrat N piese, dintre care numai M sînt corespunzătoare. Se controlează $n (n \leqslant N)$ piese luate la întîmplare. Care este probabilitatea ca dintre cele n piese, m piese să fie corespunzătoare $(0 \leqslant m \leqslant M)$?

Soluție. Fie P_m probabilitatea ca dintre cele n piese controlate m piese să fie corespunzătoare $(m \leqslant n)$.

Numărul cazurilor posibile este C_N^n, iar numărul cazurilor favorabile este $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ și deci:

$$P_m = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Observație. Știind că

$$\sum_{m=0}^{M} P_m = 1,$$

rezultă că

$$\sum_{m=0}^{M} C_M^m C_{N-M}^{n-m} = C_N^n.$$

Dacă $N = 2M = 2n$, rezultă că:

$$\sum_{m=0}^{M} C_M^m C_M^{n-m} = C_{2M}^n;$$

cum

$$C_M^{n-m} = C_M^{M-n+m} = C_M^m,$$

rezultă

$$\sum_{m=0}^{M} (C_M^m)^2 = C_{2M}^n.$$

9. Dintr-un lot de 1000 piese, alegem la întîmplare 100 piese pentru examinare. Știind că 2% din piese sînt defecte, care este probabilitatea ca printre piesele examinate cel puțin trei să fie defecte?

Soluție. Din cele 1000 de piese se supun examinării 100; dintre cele 100 de piese 98 sînt bune și 2 sînt defecte. Proba-

bilitatea ca să avem în lotul de 100 piese examinate k piese defecte este $C_{100}^{k}\left(\frac{2}{100}\right)^{k}\left(\frac{98}{100}\right)^{100-k}$. Probabilitatea cerută este:

$$p=\sum_{k=3}^{100} C_{100}^{k}\left(\frac{2}{100}\right)^{k}\left(\frac{98}{100}\right)^{100-k}$$

10. Evenimentul A constă în apariţia cel puţin o dată a feţei 6, aruncînd un zar de patru ori, şi evenimentul B constă în apariţia feţei 6 cel puţin de două ori, aruncînd de 24 ori cîte două zaruri. Care din cele două evenimente este mai probabil?

Soluţie. Probabilitatea ca aruncînd un zar să nu apară niciodată faţa 6 este $\frac{5}{6}$, iar ca să nu apară faţa 6, aruncînd patru zaruri, este $P(\bar{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^{4}$.

Rezultă că probabilitatea ca aruncînd un zar de patru ori să apară faţa 6 cel puţin o dată este

$$p(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{4}.$$

Pentru calculul probabilităţii evenimentului B, vom evalua probabilitatea evenimentului $\bar{B}$. Interpretăm apariţia feţei 6 a unui zar, ca o urnă cu două stări, una „faţa 6" cu $p=\frac{1}{6}$ şi alta „non faţa 6" cu probabilitatea $q=\frac{5}{6}$. Aruncările fiind independente, în loc să aruncăm de două ori cîte 24 de zaruri, putem să aruncăm 48 de zaruri o singură dată. Atunci, după formula urnei, probabilitatea evenimentului $\bar{B}$ ca în 48 de aruncări să obţinem sau de zero ori faţa 6 sau o dată faţa 6 este

$$p(\bar{B})=\left(\frac{5}{6}\right)^{48}+48\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{47}.$$

Comparînd $p(\bar{A})$ cu $p(\bar{B})$, avem

$$\frac{p(\bar{B})}{p(\bar{A})}=\frac{\frac{53}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{47}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{4}}<9\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{43}<1,$$

deci $P(\bar{B})<P(\bar{A})$. Cum însă $P(\bar{B})=1-P(B)$ şi $P(\bar{A})=1-P(A)$, rezultă că

$$p(A)<p(B).$$

11. Intr-o cameră întunecoasă sînt cinci perechi de pantofi de acelaşi fel. Alegem la întîmplare cinci pantofi. Care este probabilitatea ca între cei cinci pantofi să fie cel puţin o pereche?

Soluţie. Cele cinci perechi formează o mulţime de zece obiecte din care putem alege cîte cinci în C_{10}^5 moduri. Deci numărul cazurilor posibile este C_{10}^5. Pentru ca între cei cinci pantofi să nu fie nici o pereche trebuie ca cei cinci pantofi să fie sau pentru piciorul stîng sau pentru cel drept. Pentru evenimentul „între cei cinci pantofi nu este nici o pereche" avem două cazuri favorabile. Atunci probabilitatea ca între cei cinci pantofi să nu fie nici o pereche este $\frac{2}{5}$ şi deci probabilitatea cerută este

$$1-\frac{2}{C_{10}^5}=\frac{250}{252}=\frac{125}{126}.$$

12. Intr-o cameră întunecoasă sînt cinci perechi de pantofi de mărimi diferite. Alegem la întîmplare cinci pantofi. Care este probabilitatea ca între cei cinci pantofi să fie cel puţin o pereche de aceeaşi mărime?

Soluţie. Cele cinci perechi formează o mulţime de zece obiecte din care putem alege cîte cinci în C_{10}^5 moduri. Cazuri posibile avem C_{10}^5.

Vom calcula întîi probabilitatea p de a nu alege nici o pereche. Intre cei cinci pantofi poate să nu apară nici un pantof stîng în C_5^5 grupe, să nu apară un pantof stîng în C_5^4 grupe, doi pantofi stîngi în C_5^3 grupe ş.a.m.d. Numărul cazurilor favorabile este atunci:

$$C_5^5+C_5^4+C_5^3+C_5^2+C_5^1+C_5^0=2^5 \quad \text{şi} \quad p=\frac{2^5}{C_{10}^5}.$$

Probabilitatea de a extrage cel puţin o pereche este:

$$1-\frac{2^5}{C_{10}^5}=\frac{220}{252}.$$

13. Intr-o urnă sînt n bile albe şi m bile negre. Se scot în bloc, la întîmplare, k bile. Care este probabilitatea ca printre ele să fie r bile albe $(r\leqslant k)$.

Să se deducă apoi valoarea sumei

$$C_n^0\cdot C_m^k+C_n^1\cdot C_m^{k-1}+\ldots+C_n^k\cdot C_m^0.$$

Soluție. În urnă sînt $n+m$ bile pe care, în grupe de cîte k, le putem scoate în C_{n+m}^{k} moduri. Cele n bile albe se pot grupa cîte r în C_n^r moduri.

Pentru a forma o grupă favorabilă cu k bile, punem alături de cele r bile albe cîte $k-r$ bile din cele m bile negre. Cele m bile negre se pot grupa cîte $k-r$ în C_m^{k-r} moduri.

Probabilitatea cerută este

$$p_r = \frac{C_n^r \cdot C_m^{k-r}}{C_{n+m}^k}.$$

Pentru a calcula suma cerută, vom observa că

$$p_0+p_1+p_2+\ldots+p_k=1$$

și deci

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m = C_{n+m}^k.$$

14. Problema lui Banach. Un călător își cumpără deodată două cutii cu chibrituri și le bagă în buzunar. După aceea, de fiecare dată cînd folosește un chibrit îl scoate la întîmplare dintr-o cutie. După cîtva timp, scoate o cutie și constată că este goală. Care este probabilitatea ca în a doua cutie să fie în acel moment k chibrituri, dacă la început ambele cutii aveau cîte n chibrituri ? [1])

Folosind rezultatele problemei, să se deducă valoarea sumei

$$C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 2^2 C_{2n-2}^n + \ldots + 2^n C_n^n.$$

Soluție. În cele două cutii avem $2n$ chibrituri. Pînă în momentul cînd constată că o cutie este goală, călătorul caută în acea cutie de $n+1$ ori. Prin urmare, cele două cutii pot fi cercetate în 2^{2n+1} moduri, pînă ce o cutie rămîne goală.

Favorabile sînt acele cazuri în care din primele $2n-k$ chibrituri n sînt din prima cutie și $n-k$ din a doua cutie, al $(2n-k+1)$-lea chibrit fiind scos din prima cutie; sau invers: din $2n-k$ extracții, n sînt din a doua cutie și $n-k$ din prima, al $(2n-k+1)$-lea chibrit fiind din a doua cutie.

Numărul extracțiilor în care $n-k$ chibrituri sînt din cutia a doua și n din prima este C_{2n-k}^n.

Combinînd aceste rezultate cu 2^k posibilități de realizare în următoarele k extracții, deducem că numărul extracțiilor, în care prima cutie am cercetat-o de $n+1$ ori și a doua de $n-k$ ori,

[1]) Vezi [29].

este $2^k C_{2n-k}^n$. Schimbînd acum ordinea cutiilor, obținem, că numărul cazurilor favorabile este

$$2 \cdot 2^k C_{2n-k}^n = 2^{k+1} C_{2n-k}^n$$

și probabilitatea cerută este

$$p_k = \frac{2^{k+1} C_{2n-k}^n}{2^{2n+1}} = \frac{C_{2n-k}^n}{2^{2n-k}}.$$

Știind că $p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, obținem

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} C_{2n-k}^n = 2^{2n+1}.$$

15. Intr-un tramvai cu trei vagoane se urcă nouă pasageri. Fiecare pasager alege vagonul la întîmplare. Care este probabilitatea ca:

a) In primul vagon să urce trei persoane?

b) In fiecare vagon să urce trei persoane?

c) Intr-un vagon să urce patru, într-unul trei și în celălalt două persoane?

Soluție. Fiecare pasager poate alege, independent unul de altul, unul dintre cele trei vagoane. Numărul modurilor de grupare a celor nouă pasageri, în cele trei vagoane, este 3^9.

a) Cei nouă călători se pot urca cite trei în C_9^3 moduri. Dacă în primul vagon s-au urcat trei pasageri, atunci ceilalți șase rămași se pot grupa, în celelalte două vagoane, în 2^6 moduri. Deci, cazuri favorabile avem $C_9^3 \cdot 2^6$.

Probabilitatea cerută este

$$p_a = \frac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9} = \frac{1792}{6561} \approx 0{,}273.$$

b) Trei pasageri, dintre cei nouă, se pot urca în primul vagon în C_9^3 moduri.

Din cei nouă pasageri rămîn șase care se pot urca în al doilea vagon cîte trei în C_6^3 moduri.

Rezultă că numărul cazurilor favorabile este egal cu $C_9^3 \cdot C_6^3$ și probabilitatea cerută este

$$p_b = \frac{C_9^3 \cdot C_6^3}{3^9} = \frac{9!}{(3!)^3 3^9} = 0{,}085.$$

c) Să presupunem că în primul vagon se urcă doi pasageri şi în al doilea trei; cei nouă pasageri pot realiza această grupare în $C_9^2 \cdot C_{9-2}^3$ moduri.

Permutînd între ele cele trei vagoane, obţinem numărul de cazuri favorabile $6 \cdot C_9^2 C_{9-2}^3$ şi probabilitatea cerută este

$$p_c = \frac{6C_9^2 C_{9-2}^3}{3^9} = \frac{9!}{2 \cdot 4! \cdot 3^9} \approx 0{,}384.$$

16. La casa de bilete stau la rînd $n+m$ oameni; n dintre ei au monede de 10 lei. Biletul costă 5 lei. Înainte de vînzare în casă nu există bani. Care este probabilitatea ca nici-unul dintre cumpărători să nu aştepte restul? [1])

Soluţie. Experienţele sînt reprezentate prin cei $n+m$ cumpărători, dintre care n au monede de 5 lei şi m au monede de 10 lei. Problema restului se pune numai pentru cei m care au monede de 10. Numărul total de cazuri este C_{n+m}^m.

Să însemnăm cu A_0 punctul de coordonate (0,0) din plan (fig. 1) şi cu A_{n+m} punctul de coordonate (n, m). Din punctul A_0 du-

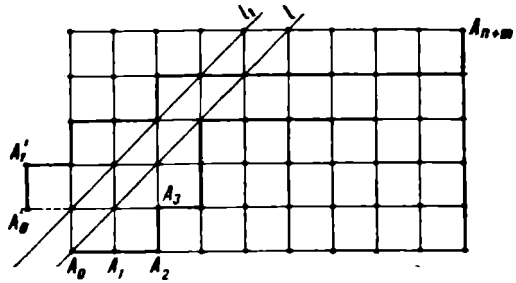

Fig. 1.

cem un segment de lungime 1, orizontal spre dreapta, dacă A_1 are monedă de 5 lei sau vertical (în sus), dacă A_1 are monedă de 10. Din punctul A_1 ducem un segment de lungime 1 orizontal, dacă A_2 are monedă de 5 sau vertical, dacă A_2 are monedă de 10. Din A_2 construim segmentul A_2A_3 de lungime 1, orizontal sau vertical, după cum A_3 are monedă de 5 sau de 10. Astfel, pentru fiecare din cele C_{n+m}^m aşezări posibile ale celor $n+m$ cumpărători corespunde o linie poligonală $A_0A_1A_2 \ldots A_{n+m}$, formată din n segmente orizontale şi m segmente verticale. Toate aceste drumuri se opresc în punctul A_{n+m}.

Să numărăm, acum, cazurile în care nici un cumpărător nu asteaptă rest. Pentru ca aceasta să aibă loc trebuie ca înaintea fiecărui cumpărător să nu fie mai mulţi cumpărători cu monede de 10

[1]) Vezi [29].

decît cu monede de 5. Geometric, aceasta înseamnă că fiecare drum care reprezintă un caz favorabil trebuie să fie sub bisectoarea sistemului de coordonate l, în particular primul segment din A_0 trebuie să fie orizontal. Rezultă că fiecare drum care reprezintă un caz nefaborabil, trebuie să întîlnească bisectoarea l sau, ceea ce este acelaşi lucru, să aibă vîrfuri pe dreapta l_1, obţinută din translaţia dreptei l.

Pentru $m>n$, orice drum are vîrfuri pe dreapta l_1; în acest caz, punctul A_{n+m} este situat deasupra dreptei l şi probabilitatea cerută este nulă. Vom presupune că $m \leqslant n$ şi vom număra drumurile poligonale care au vîrfuri pe dreapta l_1. Numărul drumurilor care unesc pe A_0 cu A_{n+m} şi au vîrfuri pe dreapta l_1 coincide cu numărul tuturor drumurilor care unesc pe A_0' cu A_{n+m}. Acestea din urmă sînt în număr de C_{m+n}^{m-1}, deoarece sînt formate din $n+1$ orizontale şi $m-1$ verticale.

Astfel, probabilitatea cerută este

$$p=1-\frac{C_{n+m}^{m-1}}{C_{n+m}^{m}}=1-\frac{m}{n+1}$$

sau

$$p=\frac{n-m+1}{n+1}.$$

17. Intr-o loterie cu 100 de bilete există 3 bilete cîştigătoare. Un jucător a cumpărat 40 de bilete.

1) Care este probabilitatea ca el să cîştige cu un singur bilet?
2) Care este probabilitatea ca să cîştige cel puţin cu un bilet?

Soluţie. 1) Să notăm cu A evenimentul care constă în cîştigarea cu un singur bilet din 40 de bilete cumpărate. Determinăm probabilitatea evenimentului A prin raportul dintre numărul cazurilor favorabile cîştigului şi numărul cazurilor posibile. Numărul cazurilor posibile este

$$C_{100}^{40},$$

iar numărul cazurilor favorabile este

$$C_3^1 \cdot C_{97}^{39}$$

şi deci

$$P(A)=\frac{C_3^1 \cdot C_{97}^{39}}{C_{100}^{40}}=\frac{236}{539}.$$

2) Notînd cu B evenimentul care constă în cîştigarea cu cel puţin un bilet, numărul de cazuri favorabile cîştigului este

$$C_3^1 C_{97}^{39}+C_3^2 C_{97}^{38}+C_3^3 C_{97}^{37},$$

iar numărul cazurilor posibile rămîne C_{100}^{40}. Rezultă că

$$P(B)=\frac{C_3^1C_{97}^{39}+C_3^2C_{97}^{38}+C_3^3C_{97}^{37}}{C_{100}^{40}}=1-\frac{C_{97}^{37}}{C_{100}^{40}}.$$

18. Se dau 52 de bile, dintre care 4 sînt albe. Cele 52 bile se împart în 4 grupe egale. Se cere să se determine probabilitatea ca în fiecare grupă să se găsească o bilă albă.

Soluţie. Se vor forma 4 grupe de cîte 13 bile. Probabilitatea P_1 ca în prima grupă să se găsească o bilă albă, este (conform schemei bilei neîntoarse)

$$P_1=\frac{C_4^1C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}}.$$

După formarea primei grupe au rămas 39 de bile, dintre care 3 albe. Probabilitatea P_2 ca în grupa a doua să avem o bilă albă este

$$P_2=\frac{C_3^1C_{36}^{12}}{C_{39}^{13}}.$$

În mod analog,

$$P_3=\frac{C_2^1C_{24}^{12}}{C_{26}^{13}}.$$

Probabilitatea cerută este dată de produsul celor trei probabilităţi, deci

$$P=P_1\cdot P_2\cdot P_3.$$

19. Se aruncă două zaruri de 25 de ori. Să se calculeze probabilitatea ca dubla patru să apară cel puţin odată.

Soluţie. Vom calcula probabilitatea contrară, deci probabilitatea ca dubla patru să nu iasă niciodată în cele 25 de aruncări. Aceasta este dată de

$$q_{25}=\left(\frac{35}{36}\right)^{25},$$

deoarece

$$q_1=\left(1-\frac{1}{36}\right)=\frac{35}{36},$$

şi aruncările sînt independente între ele.

Probabilitatea căutată este deci

$$p_{25}=1-q_{25}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25}.$$

20. Trei jucători de şah joacă în următoarele condiţii: întîi joacă primul cu al doilea, cîştigătorul joacă cu al treilea şi aşa mai departe. Cîştigător este acela care învinge de două ori consecutiv. Să se determine probabilitatea de cîştig pentru fiecare jucător, la începutul primei partide.

Soluţie. Vom presupune că jucătorii sînt de forţe egale. Să notăm cu A, B, C cei trei jucători. Prima partidă o joacă A cu B. Să notăm cu p, q, r probabilităţile de cîştig ale lui A, B, C după ce A a cîştigat prima partidă. Se vede că avem

$$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r,\quad q=\frac{1}{2}p,\quad r=\frac{1}{2}q,$$

de unde rezultă că $p=\frac{4}{7}$, $q=\frac{2}{7}$, $r=\frac{1}{7}$.

Jucătorii A şi B vor avea aceleaşi probabilităţi de cîştig, deoarece joacă în condiţii identice. Jucătorul A, la începutul jocului, poate cîştiga prima partidă cu probabilitatea $\frac{1}{2}$ şi după aceea cu probabilitatea $\frac{4}{7}$. De asemenea poate cîştiga jocul pierzînd prima partidă cu probabilitatea $\frac{1}{2}$ şi învingînd apoi, conform rezultatului de mai sus, cu probabilitatea $\frac{1}{7}$. Deci

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}r=\frac{5}{14}\quad \text{şi}\quad P(C)=1-2\cdot\frac{5}{14}=\frac{4}{14}.$$

21. Se aruncă două zaruri de 18 ori. Să se determine probabilitatea ca dubla patru să iasă cel puţin de două ori.

Soluţie. Să notăm cu P probabilitatea ca din 18 aruncări, dubla patru să iasă cel puţin de două ori. Aceasta este

$$P=1-q_1-q_2,$$

unde q_1 este probabilitatea ca dubla patru să nu iasă niciodată, iar q_2 probabilitatea ca dubla patru să iasă odată (în cele 18 aruncări). Avem

$$q_1=\left(\frac{35}{36}\right)^{18},\quad \text{iar}\quad q_2=C_{18}^{1}\left(\frac{35}{36}\right)^{17}\frac{1}{36}$$

(aplicînd schema urnei lui Bernoulli) şi deci

$$P=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{18}-C_{18}^{1}\cdot\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{17}.$$

22. Un trăgător A_1 nimereşte o ţintă de 7 ori din 9 focuri, iar un trăgător A_2, de 9 ori din 11 focuri. Să se determine probabilitatea ca ţinta să fie atinsă de cel puţin unul dintre ei, dacă trăgătorii A_1 şi A_2 trag simultan în aceeaşi ţintă.

Soluţie. Probabilitatea $P(A_1)$ ca trăgătorul A_1 să nimerească ţinta de 7 ori din 9 focuri este $P(A_1)=\frac{7}{9}$; analog, $P(A_2)=\frac{9}{11}$. Să calculăm acum $P(A_1 \cup A_2)$. Ştim că $P(A_1 \cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1 \cap A_2)$, unde $P(A_1 \cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$, întrucît A_1 şi A_2 sînt compatibile şi independente; deci

$$P(A_1 \cup A_2)=\frac{7}{9}+\frac{9}{11}-\frac{7}{9}\cdot\frac{9}{11}.$$

23. Doi trăgători zăresc ţinta în acelaşi moment şi trag simultan asupra ei.

Să presupunem că fiecare dintre trăgători nimereşte ţinta cu probabilitatea $\frac{1}{3}$. Care este probabilitatea ca ţinta să fie doborîtă?

Să se rezolve aceeaşi problemă în cazul a n trăgători.

Soluţie. Probabilitatea ca un trăgător să nu nimerească ţinta este $q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, iar ca ambii să nu nimerească ţinta este $q_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Probabilitatea că ţinta să fie doborîtă este

$$p_1=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

In cazul celor n trăgători, avem

$$p_1=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

24. Să considerăm două evenimente: A şi $\bar{A}$ (contrarul lui A). Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ probabilităţile evenimentului A în n experienţe şi $q_1, q_2, \ldots, q_n$ probabilităţile evenimentului $\bar{A}$ în aceleaşi experienţe ($p_i+q_i=1$, pentru $i=1, 2, \ldots, n$).

Să se determine probabilitatea ca în cele n experienţe evenimentul A să se întîmple de k ori şi $\bar{A}$ de $n-k$ ori.

Soluţie. Să notăm cu $i_1, i_2, \ldots, i_k$ o combinaţie de k numere din şirul 1, 2, 3, ..., n şi cu $i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n$ o combinaţie

a celorlalte $n-k$ numere. Aplicînd teoremele de adunare şi înmulţire a probabilităţilor, obţinem:

$$P=\sum p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}\cdot q_{i_{k+1}}q_{i_{k+2}}\dots q_{i_n}.$$

Toţi termenii care intră în suma din partea a doua sînt diferite produse parţiale ale dezvoltării

$$(p_1t+q_1)(p_2t+q_2)\dots(p_nt+q_n);$$

atunci, probabilitatea P este tocmai coeficientul lui t^k din dezvoltarea acestui produs.

Această schemă poartă numele de *schema lui Poisson*; ea poate fi formulată astfel:

Se dau n urne V_1, V_2, ..., V_n care conţin bile albe şi negre în proporţii date. Din fiecare urnă se extrage o bilă la întîmplare. Care este probabilitatea de a extrage k bile albe şi $n-k$ bile negre?

25. Se dau urnele V_1, V_2, V_3 cu următoarele compoziţii:

— urna V_1 are 3 bile albe şi 5 negre.

— urna V_2 are 5 bile albe şi 2 negre.

— urna V_3 are 2 bile albe şi 3 negre.

Se cere:

a) Probabilitatea de a obţine în cele trei extracţii o bilă albă (deci două negre).

b) Probabilitatea să nu iasă nici o bilă albă în cele trei extracţii.

Soluţie. Sîntem în cazul schemei lui Poisson.

a) Probabilitatea de a obţine o bilă albă este dată, deci, de coeficientul lui t din produsul

$$\left(\frac{3}{8}t+\frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{7}t+\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{5}t+\frac{3}{5}\right) \quad \text{sau} \quad P=\frac{15}{56}+\frac{9}{140}+\frac{2}{56}.$$

b) Probabilitatea să nu iasă nici-o bilă albă este dată de termenul liber al produsului de mai înainte. Deci

$$Q=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{28}.$$

26. O urnă conţine 5 bile albe şi 2 negre, alta 4 bile albe şi 3 negre şi a treia 6 bile albe şi 4 negre. Se extrage cîte o bilă din fiecare urnă.

Se cere să se determine probabilitatea ca două bile să fie albe şi una neagră.

Soluţie. Sîntem în cazul ſschemei lui Poisson. Fie p_k probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna de rang k şi q_k probabilitatea de a extrage o bilă neagră ($p_k+q_k=1$).

Avem: $p_1=\frac{5}{7}$, $q_1=\frac{2}{7}$; $p_2=\frac{4}{7}$, $q_2=\frac{3}{7}$; $p_3=\frac{6}{10}$, $q_3=\frac{4}{10}$; deci, aplicînd formula stabilită mai înainte (ex. 24), rezultă că

$$P=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3$$

sau

$$P=\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{10}+\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{10}+\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{10}.$$

27. O urnă conţine 5 bile albe şi 3 negre, o a doua urnă, 6 bile albe şi 2 negre şi a treia, 7 bile albe şi una neagră. Se extrage cîte o bilă din fiecare urnă. Se cere:

a) Să se determine probabilitatea ca două bile să fie albe şi una neagră.

b) Să se generalizeze problema.

Soluţie. a) Să notăm cu p_k probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna de rang k, iar cu q_k probabilitatea de a extrage o bilă neagră ($p_k+q_k=1$).

Fie P probabilitatea cerută. Putem extrage cîte o bilă albă din prima şi a doua urnă, din prima şi a treia, din a doua şi a treia, respectiv din a treia, a doua şi prima urnă, cîte o bilă neagră. Extracţiile fiind independente, avem

$$P=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3, \qquad (1)$$

unde $p_1=\frac{5}{8}$; $p_2=\frac{6}{8}$, $p_3=\frac{7}{8}$, iar $q_1=1-\frac{5}{8}$; $q_2=1-\frac{6}{8}$; $q_3=1-\frac{7}{8}$.

Inlocuind în (1), obţinem

$$P=\frac{5}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{7}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{7}{8}=\frac{113}{256}.$$

b) Să considerăm evenimentele A şi $\bar{A}$.

Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ probabilităţile evenimentului A în n experienţe şi $q_1, q_2, \ldots, q_n$ probabilităţile evenimentului $\bar{A}$. Trebuie să calculăm probabilitatea ca în cele n experienţe evenimentul A să se întîmple de k ori şi $\bar{A}$ de $n-k$ ori.

Să notăm cu $i_1, i_2, \ldots, i_k$ o combinaţie de cîte k numere din şirul $1, 2, \ldots, n$ şi cu $i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n$ o combinaţie a celor-

alte $n-k$ numere. Aplicînd teoremele de adunare şi de înmulţire a probabilităţilor, obţinem

$$P=\sum p_{i_1}p_{i_2}p_{i_k}\cdot q_{i_{k+1}}q_{i_{k+2}}\cdots q_{i_n}.$$

28. Să considerăm un şir de urne $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, astfel încît urna U_n să conţină a_n bile albe şi b_n bile negre. Se extrage o bilă din urna U_1, apoi dacă această bilă este neagră, o bilă din urna U_2 şi aşa mai departe pînă cînd extragem o bilă albă.

Se cere probabilitatea de a extrage o bilă albă, dacă se fac cel mult k extracţii.

Soluţie. Fie A_l evenimentul care constă în a extrage o bilă albă din urna U_l şi B_l evenimentul care constă în a extrage o bilă neagră din aceeaşi urnă. Probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna U_l este

$$P(A_l)=\frac{a_l}{a_l+b_l}$$

iar probabilitatea de a extrage o bilă neagră este

$$Q(B_l)=\frac{b_l}{a_l+b_l}.$$

Fie E_k evenimentul care constă în extragerea unei bile albe în cel mult k extracţii, urmînd condiţiile problemei. Bila albă poate fi extrasă fie la prima extracţie din urna U_1 şi atunci se realizează evenimentul A_1, fie la a doua extracţie din urna U_2, dacă din U_1 s-a extras o bilă neagră şi atunci se realizează evenimentul $A_2\cap B_1$, fie din U_3 dacă din U_1, U_2 s-au extras bile negre şi atunci se realizează evenimentul $A_3\cap B_1\cap B_2$, ş.a.m.d. Evenimentul E_k este atunci reuniunea evenimentelor incompatibile

$$A_1\cup(A_2\cap B_1)\cup(A_3\cap B_1\cap B_2)\cup\ldots\cup(A_k\cap B_1\cap B_2\cap\ldots B_{k-1}).$$

Fie P_k probabilitatea evenimentului E_k; atunci după teorema de adunare a probabilităţilor, avem:

$$P_k=P(A_1)+P(B_1\cap A_2)+P(B_1\cap B_2\cap A_3)+\ldots+$$
$$+P(B_1\cap B_2\cap B_3\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap A_k).$$

Evenimentele A_l şi B_l fiind independente, aplicînd teorema de înmulţire a probabilităţilor, rezultă:

$$P_k=\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{a_2}{a_2+b_2}+\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{b_2}{a_2+b_2}\cdot\frac{a_3}{a_3+b_3}+$$
$$+\ldots+\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{b_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{b_{k-1}}{a_{k-1}+b_{k-1}}\cdot\frac{a_k}{a_k+b_k}.$$

29. Se dau $N=mn$ obiecte dintre care p sînt notate diferit. Aceste N obiecte se repartizează la întîmplare în m căsuţe, astfel încît:

1) obiectele au aceeaşi probabilitate de a fi repartizate într-o căsuţă şi

2) probabilitatea ca a dintre cele N obiecte să cadă într-o căsuţă oarecare, este aceeaşi oricare ar fi căsuţa şi este independentă de distribuţia obiectelor dintr-o altă căsuţă.

Dacă cele N obiecte se dispun n cîte n, la întîmplare, în m căsuţe, se cere să se determine probabilitatea P_{pq} ca cele p obiecte notate să se dispună în q căsuţe oarecare ($q \leqslant p$).

Soluţie. Să determinăm mai întîi probabilitatea $P_{a_1 a_2 \dots a_q}$ ca, a_1 obiecte notate să fie dispuse la întîmplare într-una din cele m căsuţe, a_2 obiecte din cele notate în alta, ş.a.m.d., a_q obiecte din cele notate să fie în alta, $(a_1+a_2+\dots+a_q=p)$.

Numerele $a_1, a_2, \dots, a_q$ nu sînt toate diferite între ele. Cele m căsuţe se pot grupa cîte q în C_m^q moduri diferite. Într-o căsuţă cele p obiecte notate se pot dispune cîte a_1 în $C_p^{a_1}$ moduri diferite şi cele $N-p$ obiecte ne notate se pot dispune cîte $n-a_1$ în $C_{N-p}^{n-a_1}$ moduri diferite. Într-o altă căsuţă cele $p-a_1$ obiecte însemnate se pot dispune cîte a_2 în $C_{p-a_1}^{a_2}$ moduri diferite ş.a.m.d.

Cele $N-nq$ obiecte ne notate se pot dispune cîte n în fiecare din cele $n-q$ căsuţe rămase în $C_{N-qn}^n \cdot C_{N-(q+1)n}^n \dots C_{2n}^n \cdot C_n^n$ moduri diferite. Dacă numerele $a_1, a_2, \dots, a_q$ se împart în s grupe astfel încît, a j-a grupă să conţină r_j numere a_l egale între ele, atunci cu cele q căsuţe în care se găsesc obiectele notate se pot face $\frac{q!}{r_1!\, r_2! \dots r_s!}$ permutări.

Notînd cu $N_{a_1 a_2 \dots a_q}$ numărul modurilor de dispunere a celor $a_1, a_2, \dots, a_q$ obiecte notate, în q căsuţe oarecare, rezultă că

$$N_{a_1 a_2 \dots a_q} = C_m^2 \cdot C_p^{a_1} C_{N-p}^{n-a_1} \cdot C_{p-a_1}^{a_2} C_{N-p-n+a_1}^{n-a_2} \dots C_{p-a_1-\dots-a_{q-1}}^{a_q} \times$$

$$\times C_{N-(q-1)n}^{n-a_q} C_{N-qn}^n \cdot C_{N-(q+1)n}^n \dots C_{2n}^n \frac{q!}{r_1!\, r_2! \dots r_s!}$$

sau încă

$$N_{a_1 a_2 \dots a_q} = C_m^2 C_{N-p}^{n-a_1} \cdot C_{N-p-n+a_1}^{n-a_2} \dots C_{N-(q-1)n}^{n-a_q} \times$$

$$\times C_p^{a_1} C_{p-a_1}^{a_2} \dots C_{p-a_1-a_2-\dots-a_{q-1}}^{a_q} \times$$

$$\times C_{N-qn}^n \cdot C_{N-(q+1)n}^n \dots C_{2n}^n \cdot \frac{q!}{r_1!\, r_2! \dots r_s!} \qquad (1)$$

În sfîrşit, cele $N=mn$ obiecte se pot dispune în cele m căsuţe, conţinînd fiecare cîte n obiecte în

$$Q=C_N^n\, C_{N-n}^n\, C_{N-2n}^n \dots C_{2n}^n \tag{2}$$

moduri diferite.

Pentru probabilitatea $P_{a_1 a_2 \dots a_q}$ obţinem valoarea

$$P_{a_1 a_2 \dots a_q}=\frac{N_{a_1 a_2 \dots a_q}}{Q}$$

şi pentru probabilitatea P_{pq} obţinem

$$P_{pq}=\sum_{a_1, a_2, \dots, a_q} P_{a_1 a_2 \dots a_q}.$$

Observaţie. Pentru probabilitatea P_{pq} se poate da şi o altă expresie. Scriind (1) şi (2) sub altă formă, obţinem

$$N_{a_1 a_2 \dots a_q}=\frac{m!}{q!(m-q)!}\cdot\frac{(N-p)!}{(n-a_1)!\,(n-a_2)!\dots(n-a_q)!\,(n!)^{n-q}}\times$$

$$\times\frac{p!}{a_1!\,a_2!\dots a_q!}\cdot\frac{q!}{r_1!\,r_2!\dots r_s!}$$

şi

$$Q=\frac{N!}{(n!)^m}.$$

Deci

$$P_{a_1 a_2 \dots a_q}=\frac{(N-p)!\,p!}{N!}\cdot\frac{m!}{q!\,(m-q)!}\cdot\frac{n!}{a_1!\,(n-a_1)!}\times$$

$$\times\frac{n!}{a_2!\,(n-a_2)!}\dots\frac{n!}{a_q!\,(n-a_q)!}\cdot\frac{q!}{r_1!\,r_2!\dots r_s!}$$

şi

$$P_{pq}=\sum P_{a_1 a_2 \dots a_q}=\frac{C_m^q}{C_N^p}\sum_{a_1, a_2, \dots, a_q}\frac{n!}{a_1!\,(n-a_1)!}\dots\frac{n!}{a_2!\,(n-a_2)!}\times$$

$$\times\frac{q!}{r_1!\dots r_s!}=\frac{C_m^q}{C_N^p}B_{pq}^{(n)}, \tag{3}$$

unde cu $B_{pq}^{(n)}$ am notat suma.

Observăm că

$$\sum_{q=1}^{p} P_{pq}=1 \text{ şi deci } \sum_{q=1}^{p} C_m^q\, B_{pq}^{(n)}=C_N^p, \tag{4}$$

relație adevărată pentru orice m întreg și pozitiv. Diferențiind simbolic în (4) de q ori, în raport cu m și înlocuind apoi $m=0$, obținem $B_{pq}^{(n)}=(D^qC_N^p)m=0$ (observăm că $D^qC_m^1=C_m^{1-q}$).

Dar

$$D^qC_N^p=\frac{1}{p!}D^q(mn)^{(p)}=\frac{1}{p!}[(mn+qn)^{(p)}-C_q^1(mn+qn-n)^{(p)}+$$

$$+C_q^2(mn+qn-2n)^{(p)}\ldots\pm C_q^1(mn+n)^{(p)}\mp(mn)^{(p)}].$$

Cu aceasta putem scrie

$$B_{pq}^{(n)}=\frac{1}{p!}[(qn)^{(p)}-C_q^1(qn-n)^{(p)}+\ldots\pm C_q^1n^{(p)}]=$$

$$=C_{qn}^p-C_q^1C_{qn-n}^p+\ldots\pm C_q^1C_n^p.$$

Înlocuind pe $B_{pq}^{(n)}$ în (3) se obține o formulă mai comodă pentru aplicații.

30. Folosind rezultatele problemei 29 să se calculeze $P_{4,2}$ pentru $m=6$, $n=5$, $p=4$, $q=2$ aplicînd cele două formule de calcul.

Soluție. Pentru $P_{4,2}$ deducem, aplicînd prima formulă,

$$P_{4,2}=\frac{N_{3,1}}{Q}+\frac{N_{2,2}}{Q}$$

și

$$N_{3,1}=C_6^2\cdot C_{26}^2\cdot C_{24}^4\cdot C_{20}^5\cdot C_{15}^5\cdot C_{10}^5\cdot C_4^3\cdot C_1^1\cdot 2!=\frac{36\,000}{657\,720}Q;$$

analog

$$N_{2,2}=C_6^2\cdot C_{26}^3\cdot C_{23}^3\cdot C_{20}^5\cdot C_{15}^5\cdot C_{10}^5\cdot C_4^2\cdot C_2^2\cdot\frac{2!}{2!}=\frac{36\,000}{657\,720}Q;$$

de aici,

$$P_{4,2}=\frac{72\,000}{657\,720}=\frac{3000}{27\,405}.$$

Aplicînd a doua formulă,

$$P_{4,2}=\frac{C_6^2\cdot B_{4,2}^{(5)}}{C_{30}^4}$$

însă

$$B_{4,2}^{(5)}=C_{10}^4-2C_5^4=210-10=200$$

și

$$P_{4,2}=\frac{C_6^2\cdot 200}{C_{30}^4}=\frac{3000}{27\,405}.$$

31. Un joc este format din n căsuțe. Fiecare dintre cele k bile ale jocului se pune într-o căsuță la întîmplare.

a) Care este probabilitatea ca în fiecare căsuță să fie cel puțin o bilă?

b) Folosind rezultatele de la punctul (a) să se deducă valoarea sumei:

$$1^k C_n^1 - 2^k C_n^2 + 3^k C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1} n^k C_n^n,$$

unde k este un număr natural mai mic decît n.

Soluție. a) Cele k bile se pot pune în cele n căsuțe în n^k moduri. Pentru a evalua probabilitatea cerută, vom evalua probabilitatea evenimentului complementar. Probabilitatea ca în prima căsuță să nu fie bile este egală cu probabilitatea ca în celelalte $n-1$ căsuțe să fie cele k bile, adică $p = \frac{(n-1)^k}{n^k}$.

Cum sînt n căsuțe, probabilitatea ca o căsuță să fie goală este $P_1 = C_n^1 \frac{(n-1)^k}{n^k}$.

Probabilitatea ca două căsuțe să fie goale este $P_2 = C_n^2 \frac{(n-2)^k}{n^k}$

și probabilitatea ca $n-1$ căsuțe să fie goale, $P_{n-1} = C_n^{n-1} \frac{1^k}{n^k}$.

Probabilitatea cerută este

$$p = 1 - [P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \ldots + (-1)^n P_{n-1}]$$

sau

$$p = \frac{n^k C_n^0 - (n-1)^k C_n^1 + (n-2)^k C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} 1^k C_n^{n-1}}{n^k}.$$

Împărțind cu n^k, obținem

$$p = C_n^0 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k C_n^1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k C_n^{n-1}.$$

b) Observăm că pentru $k < n$, $p = 0$, deci suma cerută are valoarea zero. Pentru $k = n$, avem

$$p = \frac{n!}{n^n}$$

și deci

$$n^n \cdot C_n^0 - C_n^1 (n-1)^n + \ldots + (-1)^{n-1} 1^n C_n^{n-1} = n!$$

sau

$$n^n \cdot C_n^n - C_n^{n-1} (n-1)^n + \ldots + (-1)^{n-1} 1^n C_n^1 = n!$$

și suma cerută are valoarea 0, dacă $k < n$ și $(-1)^{n-1} n!$, dacă $k = n$.

32. O societate compusă din n perechi (soţ şi soţie) dansează. Formarea perechilor la dans este egal probabilă.

Care este probabilitatea ca la un moment dat fiecare bărbat să nu danseze cu soţia sa?

Să se calculeze limita acestei probabilităţi cînd n tinde către infinit.

Soluţie. Să numerotăm bărbaţii de la 1 la n şi să notăm A_k evenimentul ca bărbatul cu numărul k să danseze cu soţia sa. Atunci $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$, deoarece dacă avem k perechi soţ şi soţie, atunci ceilalţi $n-k$ perechi bărbaţi şi femei pot forma $(n-k)!$ perechi de dans.

Probabilitatea ca să avem cel puţin o pereche (soţ, soţie) în dans este

$$\sum_{i_1} P(A_{i_1}) - \sum_{i_1, i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{i_1, i_2, i_3} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) +$$

$$+ \ldots + (-1)^n \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}),$$

iar probabilitatea evenimentului contrar este

$$P(U_0) = 1 - \sum_{i_1} P(A_{i_1}) + \sum_{i_1, i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) - \ldots - (-1)^n \times$$

$$\times \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_n}).$$

Probabilitatea ca la un moment dat fiecare bărbat să nu danseze cu soţia lui este $P(U_0)$.

Cum formarea perechilor este egal probabilă,

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} P(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = C_m^k \frac{(n-k)!}{n!};$$

atunci

$$P(U_0) = 1 - C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} + C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} - C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} + \ldots$$

şi

$$P(U_0) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Limita acestei probabilităţi, cînd $n \to \infty$, este

$$\lim_{n \to \infty} P(U_0) = \frac{1}{e}.$$

33. Fie un grup de indivizi de vîrste, respectiv, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Notînd cu $E_1, E_2, \ldots, E_n$ evenimentele ca fiecare dintre aceşti indivizi să fie în viaţă peste un an, să se determine probabilitatea ca cel puţin unul dintre cei n indivizi să fie în viaţă peste un an.[1])

Soluţie. Evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_n$, sînt compatibile şi independente; dacă notăm $p_i = P(E_i)$, avem

$$P(E_i \cap E_j \cap \ldots \cap E_e) = p_i \ldots p_j \ldots p_e .$$

Probabilitatea cerută este

$$P = \sum_i p_i - \sum_{ij} p_i p_j + \sum_{ijk} p_i p_j p_k - \ldots + (-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n .$$

Dacă notăm cu $T_1 = \sum_i p_i$, $T_2 = \sum_{ij} p_i p_j$, $T_3 = \sum_{ijk} p_i p_j p_k$, atunci

$$P = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \ldots + (-1)^n T_n .$$

Dacă notăm cu P_r probabilitatea ca cel puţin r dintre cele n evenimente E_i să se verifice, avem

$$P_r = T_r - C_r^1 T_{r+1} + C_{r+1}^2 T_{r+2} - \ldots + (-1)^s C_{r+s-1}^s T_{r+s} + \\ + \ldots + (-1)^{n-r} C_{n-1}^{n-r} T_n .$$

Dacă punem simbolic $T_{r+s} = T^r \cdot T^s$, atunci avem

$$P_r = T^r [1 - C_r^1 T + C_{r+1}^2 T^2 \ldots + (-1)^s C_{r+s-1}^s T^s + \ldots]$$

sau

$$P_r = \frac{T^r}{(1+T)^r} .$$

34. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n evenimente distincte pentru care

$$P(A_k) = p_k .$$

Să însemnăm cu U_r probabilitatea ca din k evenimente $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ să se realizeze cel puţin r.

Fie $S_0 = 1$ şi $S_k =$

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

atunci

$$U_r = S_r - C_{r+1}^1 S_{r+1} + C_{r+2}^2 S_{r+2} + \ldots + (-1)^{n-r} C_n^{n-r} S_n .$$

Ce devine U_r, dacă evenimentele sînt independente şi $p_1 = p_2 \ldots = p_n$?

[1]) Vezi [16].

Soluție. Prin ipoteză probabilitatea ca evenimentul A_k să se realizeze singur este p_k. Vom nota cu p_{jk} probabilitatea ca evenimentele A_j și A_k să se realizeze împreună și cu

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_k} = P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Evenimentele A_k putînd fi compatibile și dependente, probabilitatea ca dintre cele n evenimente să se realizeze numai unul singur este

$$U_1 = \sum_{i_1} p_{i_1} - 2 \sum_{i_1, i_2} p_{i_1 i_2} + 3 \sum_{i_1, i_2, i_3} p_{i_1 i_2 i_3} - \ldots + \ldots + (-1)^n \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

iar probabilitatea ca numai r evenimente să se realizeze este

$$U_r = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} p_{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1}} + \ldots + (-1)^{n-r} C_n^{n-r} p_{i_1 i_2 \ldots i_{n-r}}.$$

Folosind notația de mai înainte, avem

$$U_r = S_r - C_{r+1} S_{r+1} + C_{r+1}^2 S_{r+2} + \ldots + (-1)^{n-r} C_n^{n-r} S_n.$$

Dacă acum căutăm probabilitatea $U^{(r)}$ ca cel puțin r evenimente să se realizeze, atunci

$$U^{(r)} = U_r + U_{r+1} + \ldots + U_r$$

și înlocuind probabilitățile U_k prin valorile lor, avem

$$U^{(r)} = S_r - C_r^1 S_{r+1} + C_{r+1}^2 S_{r+2} - \ldots + (-1)^{n-r} C_{n-1}^{n-r} S_n.$$

35. Fie $\{A_j\}$ și $\{B_j\}$ două familii numerabile de evenimente. Dacă A_1 și B_1 sînt independente și, pentru orice $j>0$, $CA_1 \cap \ldots \cap CA_{j-1} \cap A_j$ și B_j sînt independente, să se arate că

$$P(\bigcup A_j \cap B_j) \geqslant \alpha P(\bigcup A_j),$$

unde $\alpha = \inf_j P(B_j)$.

Soluție. Dacă clasa A_j este disjunctă, inegalitatea rezultă imediat, deoarece pentru orice j, A_j și B_j sînt independente și deci

$$P(\bigcup A_j B_j) = \sum P(A_j) \cdot P(B_j) \geqslant \alpha \sum P(A_j) = \alpha P(\bigcup A_j).$$

În cazul general avem

$$P(\bigcup A_j B_j) = P(A_1 \cap B_1) + P(\overline{A_1 \cap B_1}) \cap A_2 \cap B_2) +$$
$$+ P(\overline{A_1 \cap B_1}) \cap (\overline{A_2 \cap B_2}) \cap A_3 \cap B_3) + \ldots \geqslant P(A_1 \cap B_1) +$$
$$+ P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap B_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap B_3) + \ldots \geqslant P(A_1) \cdot P(B_1) +$$
$$+ P(\bar{A}_1 \cap A_2) P(B_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cdot P(B_3) + \ldots \geqslant P(A_1) +$$
$$+ P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \ldots = \alpha P(\bigcup A_j)$$

şi deci

$$P(\bigcup A_j \cap B_j) \geqslant \alpha P(\bigcup A_j).$$

36. Să se determine $P_D(A \cap B \cap C)$, dacă se dă $P_D(A)$, $P_{A\cap D}(B)$ şi $P_{A\cap B\cap D}(C)$.

Soluţie. Se ştie că

$$P(X_1 \cap X_2 \cap X_3) = P(X_1) \cdot P_{X_1}(X_2)\, P_{X_1 \cap X_2}(X_3)$$

şi că

$$P_X(A) = \frac{P(X \cap A)}{P(X)}.$$

De unde rezultă că

$$P_D(A \cap B \cap C) = \frac{P(D \cap A \cap B \cap C)}{P(D)} = \frac{P(D) \cdot P_D(A)\, P_{A\cap D}(B)\, P_{A\cap B\cap D}(C)}{P(D)}$$

şi deci

$$P_D(A \cap B \cap C) = P_D(A) \cdot P_{A\cap D}(B)\; P_{A\cap B\cap D}(C).$$

37. Fie A, B, C trei evenimente. Să presupunem că se dă $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$, $P(C \cap A)$ şi $P(A \cap B \cap C)$. Să se arate că:

$$P_{\bar{A}\cap\bar{B}}(C) = \frac{P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}.$$

Soluţie. Din definiţia probabilităţii condiţionate rezultă că

$$P_{\bar{A}\cap\bar{B}}(C) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)}{P(\bar{A} \cap \bar{B})}. \tag{1}$$

Se ştie că $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ şi $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$, de unde

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B). \tag{1'}$$

Insă,

$$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$$

sau, trecînd la probabilităţi,

$$P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$$

şi înlocuind în (1) obţinem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2}$$

Pentru calculul numărătorului, folosim egalitatea

$$C = ((\overline{A \cup B}) \cap C) \cup ((A \cup B) \cap C),$$

de unde

$$P(C)=P(\overline{A\cup B}\cap C)+P((A\cup B)\cap C)=P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)+$$
$$+P((A\cap C)\cup(B\cap C))=P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)+P(A\cap C)+$$
$$+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$

şi deci

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)=P(C)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C). \quad (3)$$

Pentru calculul numitorului avem

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=(P\overline{A\cup B})=1-P(A\cap B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B). \quad (4)$$

Inlocuind în (1), respectiv (3) şi (4), se obţine formula cerută.

Observaţie. Atît în calculul din (3) cît şi în cel din (4) a fost folosită egalitatea (2).

38. Fie A şi B două evenimente. Să se arate că:

a) $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

b) $P(A\triangle B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$.

Soluţie. a) Se ştie că

$$(B-A)\cup(A\cap B)=(B\cap\bar{A})\cup(B\cap A)=B$$

şi

$$(B-A)\cap A\cap B=B\cap\bar{A}\cap A\cap B=\emptyset.$$

In baza acestora avem

$$P(B-A)+P(A\cap B)=P(B) \quad \text{sau} \quad P(B-A)=P(B)-P(A\cap B).$$

b) Din egalităţile

$$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A) \quad \text{şi} \quad (A-B)\cap(B-A)=\emptyset,$$

rezultă că

$$P(A\triangle B)=P(A-B)+P(B-A);$$

aplicînd relaţia (a), obţinem

$$P(A\triangle B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B).$$

39. O urnă U_1 conţine 7 bile albe şi 2 negre, U_2 conţine 8 bile albe şi 4 negre, U_3 conţine 10 bile albe şi 12 negre şi U_4 conţine 8 bile albe şi 12 negre. Din aceste urne se extrage o bilă albă.

Se cere să se afle probabilitatea ca ea să fi fost extrasă din urna U_3.

Soluție. Vom aplica formula lui Bayes

$$P_x(A_i)=\frac{P(A_i)\,P_{A_i}(X)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\,P_{A_i}(X)}, \qquad (1)$$

unde $A_i\,(i=1,\ \ldots,\ n)$ sînt evenimente incompatibile, iar X un eveniment oarecare din cîmpul considerat. În cazul nostru avem

$$P(A_i)=\frac{1}{4} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

și

$$P_{A_1}(X)=\frac{7}{9};\quad P_{A_2}(X)=\frac{8}{12};\quad P_{A_3}(X)=\frac{10}{22};\quad P_{A_4}(X)=\frac{8}{20}.$$

Înlocuind în (1), obținem

$$P_X(A_i)=\frac{45}{268}.$$

40. Se dau șase urne cu următoarele structuri:

(A_1) două urne care conțin cîte 2 bile albe și 4 negre;

(A_2) trei urne care conțin cîte 2 bile albe și 8 negre;

(A_3) o urnă care conține 6 bile albe și 2 negre.

Se extrage la întîmplare o bilă dintr-una din urne. Se cere

a) Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă?

b) Presupunînd că dintr-o urnă oarecare s-a extras o bilă albă, care este probabilitatea ca bila albă extrasă să aparțină uneia din structurile A_1, A_2 sau A_3?

Soluție. a) Să notăm cu A evenimentul care constă în extragerea unei bile albe. Avem

$$A=(A_1\cap A)\cup(A_2\cap A)\cup(A_3\cap A)$$

sau

$$P(A)=P(A_1\cap A)+P(A_2\cap A)+P(A_3\cap A).$$

Membrul al doilea îl putem scrie, cu ajutorul probabilităților condiționate, sub forma

$$P(A)=P(A_1)\,P_{A_1}(A)+P(A_2)\,P_{A_2}(A)+P(A_3)\,P_{A_3}(A).$$

Însă

$$P(A_1)=\frac{2}{6};\quad P(A_2)=\frac{3}{6};\quad P(A_3)=\frac{1}{6}$$

şi

$$P_{A_1}(A)=\frac{2}{6};\quad P_{A_2}(A)=\frac{2}{10};\quad P_{A_3}(A)=\frac{6}{8}.$$

De unde

$$P(A)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{8}=\frac{121}{360}.$$

b) Aplicînd formula lui Bayes, avem

$$P_A(A_1)=\frac{P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{121}{360}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{360}{121}=\frac{40}{121}$$

şi analog

$$P_A(A_2)=\frac{P(A_2)P_{A_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{121}{360}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{360}{121}=\frac{36}{121},$$

$$P_A(A_3)=\frac{P(A_3)P_{A_3}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{121}{360}}=\frac{360}{121}\cdot\frac{1}{8}=\frac{45}{121}.$$

41. Două clase A şi B cu cîte 20 elevi au, respectiv, 10 elevi buni, 5 mediocri, 5 slabi şi 5 elevi buni, 5 mediocri şi 10 slabi. Un profesor ascultă la întîmplare cîte un elev din fiecare clasă şi constată că elevul din clasa A este mai bun decît elevul din clasa B.

Care este probabilitatea pentru ca clasa A să fie prima.

Soluţie. Situaţia celor două clase este:

elevi buni	mediocri	slabi
10	5	5
5	5	10.

Intrebînd, la întîmplare, un elev din prima clasă şi unul din clasa B, avem

$$10\cdot 15+5\cdot 10=200$$

combinaţii în care elevul din prima clasă este mai bun şi

$$5\cdot 10+5\cdot 5=75$$

combinaţii în care elevul din a doua clasă este mai bun. Probabilitatea ca un elev să fie dintr-o clasă sau alta este $\frac{1}{2}$.

Probabilitatea ca clasa A să fie prima este

$$P=\frac{\frac{1}{2}\cdot 200}{\frac{1}{2}\cdot 200+\frac{1}{2}\cdot 75}=\frac{8}{11}.$$

42. Intr-un regiment sînt soldaţi în primul an, în al doilea an sau în al treilea an de stagiu militar.

Se iau la întîmplare doi soldaţi şi unul dintre ei declară că este mai vechi decît celălalt. Care este probabilitatea ca el să fie din al treilea an de stagiu?

Soluţie. Fie a, b, c numărul soldaţilor, respectiv din primul, al doilea şi al treilea an de stagiu. Luîndu-se un soldat din anul al doilea şi unul oarecare, probabilitatea ca primul să fie mai vechi este

$$\frac{a}{a+b+c-1};$$

de asemenea, probabilitatea ca un soldat din al treilea an să fie mai vechi ca un altul luat la întîmplare este

$$\frac{a+b}{a+b+c-1}.$$

Pe de altă parte, probabilităţile ca un soldat să fie în al doilea, respectiv în al treilea an, sînt

$$\frac{b}{a+b+c} \quad \text{şi} \quad \frac{c}{a+b+c}.$$

Probabilitatea ca soldatul cel mai vechi dintre cei doi să fie din al treilea an este

$$P=\frac{\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{a+b}{a+b+c-1}}{\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{a+b}{a+b+c-1}+\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+c-1}}=$$

$$=\frac{c(a+b)}{c(a+b)+ab}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Observaţie. Dacă $a=b=c$, atunci probabilitatea $P=\frac{2}{3}$. Iar dacă $a=2b=4c$, atunci $P=\frac{5}{7}$.

43. Distribuția hipergeometrică. Într-o urnă cu n bile există n_1 bile albe și $n_2=n-n_1$ bile negre. Se fac grupe de r bile (altfel spus, se fac r extracții fără repunerea bilei în urnă).

Să se determine probabilitatea p_k ca între cele r bile, k bile să fie albe.

Soluție. Cele n bile se pot grupa în C_n^r moduri în grupe de r bile. O grupă cu k bile albe și $r-k$ bile negre, se poate obține în $C_{n_1}^k \cdot C_{n-n_1}^{r-k}$ moduri. Deci probabilitatea p_k este egală cu

$$p_k=\frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n-n_1}^{r-k}}{C_n^r}. \qquad (*)$$

Numărul k poate lua valorile 0, 1, 2, ..., r, deci

$$p_0+p_1+p_2+\ldots+p_r=1$$

sau

$$C_{n_1}^0 C_{n-n_1}^r+C_{n_1}^1 C_{n-n_1}^{r-1}+\ldots+C_{n_1}^r C_{n-n_1}^0=C_n^r,$$

Dacă notăm cu p și q respectiv

$$p=\frac{n_1}{n}, \quad q=\frac{n_2}{n}, \quad p+q=1,$$

formula (*) se scrie

$$p_k=\frac{C_{pn}^k C_{nq}^{r-k}}{C_n^r}.$$

Pentru $k=0$, obținem

$$p_0=\frac{C_{pn}^0 \cdot C_{nq}^r}{C_n^r}=\frac{nq\,(nq-1)\ldots(nq-r+1)}{n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}$$

și

$$p_k=\frac{r\,(r-1)\,(r-2)\ldots(r-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\cdot\frac{np\,(np-1)\ldots(np-k+1)}{nq\,(nq-1)\ldots(nq-k+1)}\cdot p_0.$$

Rezultă că p_0, p_1, p_2, ... sînt coeficienții lui x^0, x^1, x^2, ... din seria

$$p_0\left[1+\frac{r}{1}\,\frac{np}{nq-r+1}\,x+\frac{r\,(r-1)}{2!}\,\frac{np\,(np-1)}{(nq-r+1)\,(nq-r+2)}\,x^2+\ldots\right].$$

Dacă notăm

$$\alpha=-r, \quad \beta=-np, \quad \gamma=nq-r+1,$$

atunci seria de mai înainte se scrie

$$P_0\left[1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\gamma(\gamma+1)}x^2+\dots\right]$$

şi observăm că seria din paranteză este seria hipergeometrică.

Prin urmare p_k este produsul dintre p_0 şi coeficientul lui x^k din seria hipergeometrică.

44. Să se arate că pentru repartiţia hipergeometrică

$$C_r^k\left(p-\frac{k}{n}\right)^k\left(q-\frac{r-k}{n}\right)^{r-k}<p_k<C_r^k p^k q^{r-k}\left(1-\frac{r}{n}\right)^{-r},$$

unde

$$p=\frac{n_1}{n},\quad q=\frac{n_2}{n}.$$

Soluţie. Am văzut că probabilitatea ca, extrăgînd n bile printre ele k să fie albe, este

$$p_k=\frac{C_{np}^k\cdot C_{nq}^{r-k}}{C_n^r}. \tag{1}$$

Ţinînd seamă de faptul că $np+nq=n$ formula (1) se scrie

$$p_k=C_r^k\frac{C_{n-r}^{np-k}}{C_n^{np}}.$$

Factorul al doilea din membrul al doilea se scrie

$$\frac{C_{n-r}^{np-k}}{C_n^{np}}=\frac{np!\,nq!\,(n-r)!}{(np-k)!\,(nq-r+k)!\,n!}=$$

$$=\frac{p^k\cdot q^{r-k}\left(1-\frac{k-1}{np}\right)\dots\left(1-\frac{r-k-1}{nq}\right)\dots\left(1-\frac{1}{nq}\right)}{\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\left(1-\frac{r-2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)n};$$

majorînd fiecare paranteză de la numărător cu 1 şi minorînd fiecare paranteză de la numitor cu $\left(1-\frac{r}{n}\right)$, obţinem

$$\frac{C_{n-r}^{np-k}}{C_n^{np}}<\frac{p^k q^{r-k}}{\left(1-\frac{r}{n}\right)^r}. \tag{3}$$

Pentru obținerea membrului întîi al inegalității (3), îl vom transcrie convenabil. Dînd la numărător și numitor factor comun pe n, atunci

$$\frac{C_{n-r}^{np-k}}{C_n^{np}} = \frac{\left(p-\frac{k-1}{n}\right)\left(p-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(p-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(q-\frac{r-k-1}{n}\right)\cdots\left(q-\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\left(1-\frac{r-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

Minorînd fiecare factor de la numărător respectiv prin $p-\frac{r}{n}$ și $q-\frac{r-k}{n}$ și majorînd factorii de la numitor cu 1, obținem

$$\frac{C_{n-r}^{np-k}}{C_n^{np}} > \left(p-\frac{r}{n}\right)^k \cdot \left(q-\frac{r-k}{n}\right)^{r-k}. \tag{4}$$

Cuplînd rezultatele (2), (3) și (4), găsim că

$$C_r^k\left(p-\frac{r}{n}\right)^k\cdot\left(q-\frac{r-k}{n}\right)^{r-k} < p_k < C_r^k p^k q^{r-k}\left(1-\frac{r}{n}\right)^{-r}.$$

45. Într-un lot de piese, fiecare piesă este numerotată de la 1 la n; extragem piesele succesiv. Care este probabilitatea ca:

a) în extracția de rangul i să extragem piesa însemnată cu numărul i?

b) Rangul extracției să fie cel mult egal cu numărul înscris pe piesă?

Soluție. a) Să notăm cu p_i probabilitatea ca în a i-a extracție să scoatem piesa cu numărul i. Avem $n!$ grupe de cîte n piese. Dacă în a i-a extracție am obținut grupa

$$\left(a_{k_1}^1,\ a_{k_2}^2,\ \ldots,\ a_i^i,\ a_{k_{i+1}}^{i+1},\ \ldots,\ a_{k_n}^n\right),$$

atunci cazurile favorabile le obținem păstrînd pe a_i^i fix și permutînd între ele celelalte $n-1$ piese; adică vom obține $(n-1)!$ cazuri favorabile și

$$p_i = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

oricare ar fi n.

b) Fie p_{ij} probabilitatea ca, scoțînd piesele din lot, în a i-a extracție să scoatem piesa cu numărul i și în a j-a, piesa cu numărul j; dacă

$$\left(a_{k_1}^1 a_{k_2}^2,\ \ldots,\ a_i^i,\ a_{k_{i+1}}^{i+1},\ \ldots,\ a_j^j,\ a_{k_{j+1}}^{j+1},\ \ldots,\ a_{k_m}^n\right)$$

este un caz favorabil, obținem celelalte cazuri favorabile permutînd între ele cele $n-2$ litere și păstrînd fixe literele a_i^i, a_j^j, găsim

$$p_{ij}=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}.$$

Probabilitatea ca să extragem la „h" ranguri date piesele cu numerele corespunzătoare rangurilor este

$$p_{ij\ldots h}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}.$$

In particular, probabilitatea ca în prima extracție să scoatem piesa cu numărul 1, în a doua, piesa cu numărul 2 etc., în a n-a, piesa cu numărul n, este $\frac{1}{n!}$. Vom observa că:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=n\cdot\frac{1}{n}=1,$$

$$\sum_{i\neq j} p_{ij}=C_n^2\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2!},$$

$$\sum_{i\neq j\neq k} p_{ijk}=C_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3!},$$

. . . . . .

$$\sum_{i\neq j\neq k\neq\ldots\neq l} p_{ijk\ldots l}=C_n^h\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-h+1)}=\frac{1}{h!}.$$

Cum evenimentele care dau naștere probabilităților p_i, p_{ij}, p_{ijk} sînt evenimente compatibile, rezultă că probabilitatea P, cerută, este

$$P=p_i-\sum_{ij} p_{ij}+\sum_{ijk} p_{ijk}+\ldots,$$

adică

$$P=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Probabilitatea de a nu obține nici o concordanță este

$$Q=1-P=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}.$$

Se observă că

$$\lim_{n\to\infty} Q=\frac{1}{e}.$$

46. O mașină automată, produce două piese pe minut și în producția dintr-un schimb, dă 40 de piese defecte. Procesul se supune legii Poisson. Să se determine probabilitatea ca din cinci piese cel puțin două să fie defecte.

Soluție. In medie, într-un minut mașina produce (un schimb are 480 min) $a=\frac{40}{480}=\frac{1}{12}\approx 0{,}083$ piese defecte.

Proba de cinci piese la mașină se efectuează în $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ min. în timpul acesta mașina produce

$$\lambda=at=0{,}083\times\frac{5}{2}\approx 0{,}207\approx 0{,}2$$

piese defecte. Procesul urmînd o lege Poisson, dacă notăm cu $P_{0,2}(m)$ probabilitatea ca la cinci piese m să fie defecte, avem

$$P_{0,2}(m)=\frac{(0,2)^m}{m!}e^{-0,2}.$$

Notînd cu p probabilitatea cerută, avem

$$p=P_{0,2}(2)+P_{0,2}(3)+P_{0,2}(4)+P_{0,2}(5)\approx 0{,}0175.$$

47. Se știe că probabilitatea intrării a k apeluri în stația telefonică în intervalul de timp t este $P_k(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Știind că intrarea unui număr de chemări în două intervale de timp consecutive formează evenimente independente, să se determine probabilitatea ca în intervalul de timp $2t$ să intre s apeluri.

Soluție. Insemnăm prin A_t^k evenimentul ca în timpul t să intre în stație k apeluri. Intervalul $2t$ îl descompunem în două părți de lungime t; dacă în prima parte s-au făcut i apeluri, în partea a doua se fac $s-i$ apeluri; atunci

$$A_{2t}^s=\bigcup_{i=0}^{s}A_t^i\cap A_t^{s-i}.$$

Cum evenimentele $A_t^i\cap A_t^{s-i}$ sînt incompatibile,

$$P(A_{2t}^s)=\sum_{i=0}^{s}P(A_t^i\cap A_t^{s-i}).$$

Folosind independența evenimentelor,

$$P(A_t^i\cap A_t^{s-i})=P(A_t^i)\cdot P(A_t^{s-i})=P_t(t)\cdot P_t(s-i).$$

În modul acesta

$$P_{2t}(s)=\sum_{i=0}^{s} P_t(i)\cdot P_t(s-i).$$

Dacă pentru $P_t(k)$ luăm formula

$$P_t(k)=\frac{(at)^k}{k!}e-at \qquad (a \text{ const}),$$

atunci

$$P_{2t}(s)=\sum_{i=0}^{s}\frac{(at)^s\cdot e^{-2at}}{i!(s-i)!}=\frac{(at)^s\cdot e^{-2at}}{s!}\sum_{i=0}^{s}\frac{s}{i!(s-i)!}=\frac{(2at)^s\cdot e^{-2at}}{s!},$$

deci

$$P_{2t}(s)=2^s\cdot P_t(s)\,e^{-at}.$$

48. Să se determine probabilitatea ca un banc, care lucrează în momentul t_0, să nu se oprească în momentul t_0+t, dacă se știe că:

a) această probabilitate depinde de lungimea intervalului de timp;

b) probabilitatea de oprire este proporțională cu t, pînă la infiniți mici de ordin superior,

c) evenimentele de oprire în intervale de timp disjuncte sînt independente între ele.

Soluție. Probabilitatea ca bancul să nu se oprească în intervalul de timp Δt o notăm $p(\Delta t)$. Probabilitatea de oprire este atunci

$$1-p(\Delta t)=a\cdot\Delta t+\theta(\Delta t)$$

unde a este constantă. După (c) avem

$$p(t+\Delta t)=p(t)-p(\Delta t)=p(t)[1-a\cdot\Delta t-\theta(\Delta t)].$$

De unde:

$$\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}=-ap(t)-\frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t}\cdot p(t),$$

cînd $\Delta t\to 0$; în ipoteza că membrul întîi are limită, obținem $\frac{dp}{dt}=-ap(t)$, ecuație care are soluția $p(t)=Ce^{-at}$.

Cum $p(0)=1$, avem $C=1$, și $p(t)=e^{-at}$.

49. Să se determine probabilitatea ca o lampă electronică, ce funcționează în momentul t_0, să nu iasă din funcțiune la momentul t_0+t, în următoarele condiții:

a) probabilitatea depinde numai de mărimea intervalului de timp (t_0, t_0+t),

b) probabilitatea ca lampa să iasă din funcţiune în intervalul Δt este proporţională cu Δt, abstracţie făcînd de termeni de grad mai mare decît unu,

c) evenimentele din intervale de timp disjuncte nu depind unele de altele.

Soluţie. Să notăm probabilitatea cerută prin $P(t)$; atunci probabilitatea ca lampa să iasă din funcţiune în intervalul Δt este

$$1-P(t)=a\cdot\Delta t+\theta(\Delta t),$$

unde a este constantă şi $\theta(\Delta t)$ tinde la zero o dată cu Δt.

Din condiţia (c) rezultă că

$$P(t+\Delta t)=P(t)\cdot P(\Delta t)=P(t)\cdot[1-a\cdot\Delta t-\theta(\Delta t)];$$

de aici deducem

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=-a\cdot P(t)-\theta(1);$$

cînd $\Delta t\to 0$, avem

$$\frac{dP(t)}{dt}=a\cdot P(t).$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este $P(t)=C\cdot e^{-at}$; cum $P(t_0)=1$, rezultă

$$P(t)=e^{-a(t-t_0)}.$$

50. In exerciţiul precedent, să se determine numărul necesar de lămpi pentru a se garanta funcţionarea fără întrerupere timp de T ore.

Soluţie. Se presupune verificarea prealabilă a lămpilor. Dacă t este timpul de funcţionare a unei serii de lămpi, atunci $N\cdot t=T$. Numărul necesar de lămpi este

$$\mathfrak{N}=n\cdot N=n\frac{T}{t}=\frac{n^2}{\tau}\cdot\frac{T}{P(t)}\geqslant n;$$

unde τ este durata de funcţionare.

Dacă cerem ca

$$\frac{n^2T}{\tau P}=n,$$

atunci se obţin condiţii optime şi

$$\frac{nT}{\tau P}=1.$$

51. Să se determine timpul de ieşire din funcţiune a unui fistem care conţine n lămpi electronice, dacă termenul mediu de suncţionare a fiecărei lămpi este de τ ore. Probabilitatea de ieşire din funcţiune a unei lămpi în funcţie de timp este $q(T)$ şi se presupune constantă.

Soluţie. Se presupune că ieşirea din funcţiune a lămpilor formează evenimente egal probabile, iar lămpile sînt de acelaşi tip.

Probabilitatea de ieşire din funcţiune a unei lămpi este

$$P(t)=\int_0^t q(T)\,dt=q\cdot t.$$

Cum o lampă are τ ore de funcţionare, atunci $q\tau=1$ şi deci

$$P(t)=\frac{t}{\tau}.$$

Dacă $P_s(t)$ este probabilitatea de ieşire a sistemului din funcţiune, atunci

$$P_s(t)=\frac{nt}{\tau}.$$

Dacă $n=6$, $\tau=1000$ ore, atunci

$$P_s(t)=\frac{6}{1000}t \quad \text{şi} \quad t=\frac{P_s(t)}{0{,}006}.$$

52. Blocul unui aparat electronic conţine m detalii, fiecare cu probabilitatea de rebut P_m, n detalii, fiecare cu probabilitatea de rebut P_n şi q detalii, fiecare cu probabilitatea de rebut P_q.

Să se determine probabilitatea de rebut a blocului asamblat.

Soluţie. Dacă notăm cu P_B probabilitatea de rebut a blocului asamblat, atunci

$$P_B=mP_m+nP_n+qP_q.$$

In acest exerciţiu, probabilităţile de rebut ale detaliilor se consideră probabilităţi de evenimente independente.

53. Care este probabilitatea ca, alegînd un număr natural la întîmplare, pătratul lui (în scrierea zecimală) să se termine cu cifra 1.

Soluţie. Pentru ca un număr natural n să aibă pătratul terminat în 1, trebuie ca n să fie terminat în 1 sau 9. Problema se rezolvă determinînd probabilitatea ca un număr natural ales la întîmplare să fie terminat în 1 sau 9. Cum din fiecare zece numere

naturale consecutive numai unul singur este terminat în 1 şi de asemenea unul singur terminat în 9, rezultă că probabilitatea cerută este

$$p=\frac{2}{10}=0{,}2.$$

54. Care este probabilitatea p ca, alegînd un număr natural la întîmplare, el să fie prim cu n.

Soluţie. Faţă de numărul n, numerele naturale se împart în clasele de resturi

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \qquad (*)$$

Dacă notăm cu $\varphi(n)$ numărul numerelor prime cu n din şirul (*), atunci probabilitatea cerută este

$$p=\frac{\varphi(n)}{n}.$$

Observaţie. Dacă luăm $n=6$, atunci avem resturile 0, 1, 2, 3, 4, 5 şi $\varphi(6)=2$.

In acest caz, $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

55. Care este probabilitatea ca alegînd la întîmplare două numere naturale, cel mult unul să fie prim cu n.

Soluţie. Presupunem alegerile independente; atunci probabilitatea ca ambele numere să fie prime cu n este

$$p=\left[\frac{\varphi(n)}{n}\right]^2.$$

Deducem că probabilitatea cerută q este egală cu

$$q=1-\left[\frac{\varphi(n)}{n^2}\right]^2.$$

Observaţie. Pentru cazul particular precedent,

$$q=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

56. Care este probabilitatea ca alegînd un număr natural n, la întîmplare, cubul său să fie terminat în 11.

Soluţie. Vom căuta mai întîi să vedem cîte numere dintr-o sută, au cubul terminat în 11. Fie numărul

$$n=a_0\cdot 10+a_1\ (a_0,\ a_1=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9);$$

atunci

$$n^3=a_0 10^3+3\cdot 10^2\cdot a_0^2+3\cdot 10\cdot a_0\cdot a_1^2+a_1^3.$$

Observăm că ultimele două cifre sînt date de partea

$$3\cdot 10\cdot a_0 a_1^2+a_1^3.$$

Pentru ca acest număr să fie terminat în 11, trebuie ca $a_1=1$, iar ca numărul $3\cdot 10\cdot a_0+1$ să fie terminat în 11 trebuie ca $a_0=7$.

Prin urmare, din prima sută de numere naturale unul singur are cubul terminat în 11 şi anume 71.

Un număr oarecare n se scrie, în baza 10,

$$n=\sum_{k=0}^{n-2} a_k 10^k+a_{n-1}10+a_n,$$

unde a_k iau valori de la 0 la 9. Notînd

$$A=\sum_{k=0}^{n-2} a_k 10^k=10^2(a\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_{n-2}),$$

observăm că în cubul

$$n^3=A^3+3A^2\cdot(a_{n-1}10+a_n)+3\cdot A(a_{n-1}10+a_n)^2+(a_{n-1}10+a_n)^3$$

ultimele două cifre sînt date de partea $(a_{n-1}10+a_n)^3$.

Numărul n^3 are cubul terminat în 11, dacă numărul format cu ultimele sale cifre au cubul terminat în 11. Rezultă, atunci, că probabilitatea cerută este

$$p=\frac{1}{100}=0{,}01.$$

57. Care este probabilitatea ca numărul C_n^k, unde $n\geqslant k$ este ales la întîmplare, k fiind un număr prim dat, să fie divizibil prin k.

Soluţie. Pentru ca numărul C_n^k să fie divizibil cu k, trebuie ca numărul $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ să fie divizibil cu k^2, deoarece

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}.$$

Pentru ca $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ să fie divizibil cu k^2, trebuie ca unul dintre cei k factori să fie divizibil cu k^2; adică faţă de k^2, n trebuie să dea resturile 0, 1, 2, ..., $k-1$.

Deci, din k^2 numere, k răspund condiţiilor cerute; atunci

$$p=\frac{k}{k^2}=\frac{1}{k}.$$

Observații. Dacă $k=7$, atunci probabilitatea ca C_n^7 să fie divizibil cu 7 este $p=\frac{1}{7}$.

58. Care este probabilitatea ca 2^n, n fiind un număr natural ales la întîmplare, să înceapă cu cifra 1.

Soluție. Vom determina statistic probabilitatea cerută. Dacă $q(N)$ este numărul numerelor pentru care 2^n începe cu 1, dintre primele N numere, atunci

$$p=\lim_{N\to\infty}\frac{q(N)}{N}.$$

Vom observa că nu există două puteri distincte ale lui 2, avînd același număr de cifre și începînd amîndouă cu 1. Într-adevăr, dacă ar exista două astfel de numere, începînd cu cifra 1 și avînd același număr de cifre, atunci cel mai mare dintre ele ar fi mai mic decît îndoitul celuilalt, deci ele n-ar putea fi puteri ale lui 2. Altfel spus, cea mai mică putere a lui 2, scrisă cu mai mult de o cifră, începe neapărat cu 1. Adică cea mai mică putere a lui 2 scrisă cu două cifre, este numai 16; cea mai mică putere scrisă cu trei cifre este numai 128, cu patru cifre este numai 1024 etc.

De asemenea există puteri ale lui 2 care să se scrie cu p cifre, oricare ar fi p dat, care încep cu 1.

Dacă 2^k este cea mai mare putere care se scrie cu p cifre, atunci 2^{k+1} se scrie cu $p+1$ cifre.

Fie primele N numere naturale și să presupunem că 2^N se scrie cu n cifre. Atunci, printre puterile care se scriu cu n cifre există una care începe cu 1, printre puterile care se scriu cu $n-1$ cifre există una care începe cu 1 ș.a.m.d., printre puterile care se scriu cu două cifre există una, care începe cu 1. În total există $n-1$ puteri care încep cu 1, deci $q(N)=n-1$.

Observăm că $q(N)$ este caracteristica logaritmului zecimal al numărului 2^N, scris cu n cifre. Dacă m este mantisa logaritmului lui 2^N, atunci $q(N)+m=\lg 2^N=N\cdot\lg 2$ sau $\frac{q(N)}{N}=\lg 2-\frac{m}{N}$, unde $0\leqslant m<1$. Rezultă atunci că

$$p=\lim_{N\to\infty}\frac{q(N)}{N}=\lg 2\approx 0{,}30103,$$

deoarece $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{m}{N}=0$.

Deci probabilitatea ca o putere a lui 2 să înceapă cu 1 este aproximativ 0,30103.

59. Problema lui Cebîşev [1]. Să se arate că probabilitatea ca două numere întregi, alese la întîmplare, să fie prime între ele este $\frac{6}{\pi^2}$.

Soluţie. Vom determina mai întîi probabilitatea ca două numere întregi, alese la întîmplare, n şi m să nu aibă pe 2 ca divizor comun, adică să nu fie ambele pare. Vom determina probabilitatea statistic, presupunînd că m şi n sînt dintre primele N numere naturale şi apoi vom face pe N să tindă către infinit. Pentru simplificarea calculelor vom presupune N par. Această presupunere nu modifică rezultatul final, deoarece pentru primele $N+1$ numere naturale, probabilitatea ca cel puţin unul dintre numerele n şi m să nu coincidă cu $N+1$ este $\frac{2N+1}{(N+1)^2}$ care la limită pentru $N\to\infty$, tinde către zero.

Cum n şi m pot lua N valori, numărul total de cazuri este $N\cdot N=N^2$.

Nefavorabile sînt cazurile în care n şi m iau una dintre cele $\frac{N}{2}$ valori pare din şirul 2, 4, 6, ..., N; numărul acestor cazuri este $\frac{N^2}{2^2}$, deci numărul cazurilor favorabile este $N^2-\frac{N^2}{2^2}$, iar probabilitatea cerută

$$p_2=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^2-\frac{N^2}{2^2}}{N^2}\right)=1-\frac{1}{2^2}.$$

Printr-un raţionament analog, deducem că probabilitatea ca numerele n, m, alese la întîmplare, să nu aibă divizor comun numărul prim k este $p_k=1-\frac{1}{k^2}$.

Dacă luăm şirul numerelor prime 2, 3, 5, 7, 11, ..., α_k, atunci probabilitatea ca două numere n şi m, alese la întîmplare, să nu aibă divizori comuni nici unul dintre numerele prime de mai sus este

$$P_k=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\alpha_k^2}\right).$$

Probabilitatea p, cerută în problemă, o determinăm prin $\lim_{k\to\infty} P_k$.

Pentru calculul limitei, vom observa că pentru $0<x^2<1$ avem

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots,$$

[1]) Vezi [29].

seria din membrul al doilea fiind convergentă. Atunci

$$P_k = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_k^2}+\ldots\right)}$$

sau

$$P_k = \frac{1}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots}.$$

Rezultă că

$$p = \lim_{k\to\infty} P_k = \frac{1}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}+\ldots}.$$

Cum seria de la numitor este convergentă şi are ca limită pe $\frac{\pi^2}{6}$ rezultă că $p = \frac{6}{\pi^2}$.

Observaţie. Pentru a demonstra că

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

observăm că, pentru orice m natural,

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \frac{m(2m+2)}{3}$$

sau că

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1-\frac{2}{2m+1}\right) < 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2} <$$

$$< \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1+\frac{1}{2m+1}\right).$$

Dacă $m\to\infty$, atunci părţile extreme ale inegalităţilor tind către $\frac{\pi^2}{6}$, şi obţinem astfel limita seriei de mai înainte.

60. Să [1]) se arate că probabilitatea ca patru numere întregi, alese la întîmplare, să aibă cel puţin un divizor comun este $1-\frac{90}{\pi^4}$.

Soluţie. Vom calcula mai întîi probabilitatea q ca patru numere să nu aibă nici un divizor comun. Probabilitatea cerută p va fi egală cu $1-q$.

[1]) Vezi [29].

Probabilitatea ca patru numere întregi să nu aibă pe 2 ca divizor comun este $1-\frac{1}{2^4}$.

Dacă 2, 3, 5, 7, 11, ..., α_k este şirul de numere prime, atunci probabilitatea ca patru numere să nu aibă ca divizor comun nici unul dintre numerele prime de mai sus este

$$P_k=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\alpha_k^4}\right);$$

folosind dezvoltări asemănătoare celor din exerciţiul precedent, obţinem:

$$q=\frac{1}{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots}$$

şi deci

$$p=1-\frac{1}{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots}.$$

Pentru calculul sumei seriei de la numitor vom observa că

$$\frac{m(2m+1)(4m^2+10m-9)}{45}<\left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^4+\left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^4+\ldots+\left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^4<$$

$$<\frac{8m(m+1)(m^2+m+3)}{45}$$

sau

$$\frac{\pi^4}{90}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1+\frac{3}{2m+1}-\frac{13}{(2m+1)^2}\right)<1+\frac{1}{2^4}+$$

$$+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{m^4}<\frac{\pi^4}{90}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right)\left(1+\frac{11}{(2m+1)^2}\right).$$

Cînd m tinde către infinit, obţinem

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{m^4}\right)=\frac{\pi^4}{90}.$$

Rezultă că

$$p=1-\frac{90}{\pi^4}.$$

61. Fie dezvoltarea în fracție continuă a unui număr irațional

$$x=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

în care cîturile incomplete sînt $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Insemnăm cu $p_{i,k}$ probabilitatea ca să avem cîtul incomplet a_i egal cu numărul k. Să se determine probabilitățile $p_{1,k}$, $p_{2,k}$ și $p_{3,k}$.

Soluție. Să calculăm $p_{1,k}$, adică să calculăm probabilitatea pentru ca $a_1=k$. Avem $\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}$, deci numărul x se găsește în intervalul de lungime $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$; atunci

$$p_{1,k}=\frac{1}{k(k+1)}.$$

Prin urmare,

$$p_{1,1}=\frac{1}{2},\quad p_{1,2}=\frac{1}{6},\quad p_{1,3}=\frac{1}{12},\quad p_{1,4}=\frac{1}{20},\ \ldots$$

Să calculăm acum $p_{2,k}$. Presupunem $a_1=n$; condiția ca a_2 să fie egal cu k va fi:

$$\frac{1}{n+\frac{1}{k}}<x<\frac{1}{n+\frac{1}{k+1}},\quad \text{adică}\quad \frac{k}{nk+1}<x<\frac{k+1}{n(k+1)+1}.$$

Numărul x este cuprins în intervalul de lungime

$$\frac{k+1}{n(k+1)+1}-\frac{k}{nk+1}=\frac{1}{(nk+n+1)(nk+1)}.$$

Deci $p_{2,k}$ este

$$p_{2,k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nk+n+1)(nk+1)}.$$

Dacă scriem $p_{2,k}$ sub forma

$$p_{2,k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{k+\frac{1}{n}}-\frac{1}{k+1+\frac{1}{n}}\right].$$

atunci

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{2,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{k+\frac{1}{n}} - \frac{1}{k+1+\frac{1}{n}} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k+\frac{1}{n}} - \frac{1}{k+1+\frac{1}{n}} \right] = 1.$$

Dar $p_{2,k}$ se mai poate scrie

$$p_{2,k} = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{k}\right)\left(n+\frac{1}{k+1}\right)}. \tag{1}$$

Dacă notăm seria din membrul al doilea cu α_k şi ţinem seamă că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, deducem

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \frac{\pi^2}{6}.$$

Notînd diferenţa

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{k}\right)\left(n+\frac{1}{k+1}\right)} = \frac{\pi^2}{6} \varepsilon_k,$$

se vede că $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ şi

$$\frac{\pi^2}{6}(1-\varepsilon_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{k}\right)\left(n+\frac{1}{k+1}\right)}.$$

Deci $p_{2,k}$ devine

$$p_{2,k} = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{k(k+1)}(1-\varepsilon_k).$$

Ştiind că $2\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, avem pentru probabilitatea p_2 :

$$p_{2,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.$$

Pentru $p_{3,k}$ avem

$$p_{3,k}=\frac{1}{k(k+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{\left(nn'+1+\frac{n}{k+1}\right)\left(nn'+1+\frac{n}{k}\right)};$$

cînd k tinde către infinit suma dublă din membrul al doilea are limită.

62. Se fac n observaţii independente. Probabilitatea realizării evenimentului A în a i-a observaţie este p_i; probabilitatea realizării de m ori a evenimentului A în n observaţii este $P_n(m)$.

Să se demonstreze că:

$$\frac{P_n(1)}{P_n(0)}\geqslant\frac{P_n(2)}{P_n(1)}\geqslant\ldots\geqslant\frac{P_n(n)}{P_n(n-1)}. \tag{1}$$

Soluţie. Vom nota cu $\mathcal{Q}(n)$, mulţimea numerelor naturale pentru care (1) este adevărată. Demonstraţia o vom face folosind principiul inducţiei complete.

Se verifică că $2\in\mathcal{Q}(n)$, adică

$$\frac{P_2(1)}{P_2(0)}\geqslant\frac{P_2(2)}{P_2(1)},$$

unde $P_2(2)=p_1p_2$, $P_2(1)=p_1q_2+p_2q_1$ şi $P_2(0)=q_1q_2$.

Presupunem că $n-1\in\mathcal{Q}(n)$, adică

$$\frac{P_{n-1}(1)}{P_{n-1}(0)}\geqslant\frac{P_{n-1}(2)}{P_{n-1}(1)}\geqslant\ldots\geqslant\frac{P_{n-1}(k-1)}{P_{n-1}(k-2)}\geqslant\frac{P_{n-1}(k)}{P_{n-1}(k-1)}\geqslant\frac{P_{n-1}(k+1)}{P_{n-1}(k)}.$$

Pentru probabilităţile $P_n(k-1)$, $P_n(k)$, $P_n(k+1)$ avem relaţiile de recurenţă:

$$P_n(k-1)=P_{n-1}(k-1)\cdot q_n+P_{n-1}(k-2)\cdot p_n,$$

$$P_n(k)=P_{n-1}(k)\cdot q_n+P_{n-1}(k-1)p_n,$$

$$P_n(k+1)=P_{n-1}(k+1)q_n+P_{n-1}(k)\cdot p_n.$$

Ţinînd seamă de inegalităţile:

$$P_{n-1}(k-1)\cdot P_{n-1}(k+1)\leqslant P_{n-1}^2(k),$$

$$P_{n-1}(k)\cdot P_{n-1}(k-2)\leqslant P_{n-1}^2(k-1),$$

$$P_{n-1}(k+1)\cdot P_{n-1}(k-2)\leqslant P_{n-1}(k)\cdot P_{n-1}(k-1),$$

rezultă că

$$P_n(k+1)\cdot P_n(k-1)\leqslant P_n^2(k)$$

sau

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)}\geqslant\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}.$$

Prin urmare $n\in\mathcal{Q}(n)$ şi deci $\mathcal{Q}(n)=N$ (unde N este mulţimea numerelor naturale).

Observaţie. Dacă p_k sînt constante, atunci ne aflăm în cazul urnei Bernoulli, şi inegalităţile (1) se reduc la inegalităţile cunoscute:

$$\frac{C_n^1}{C_n^0}\geqslant\frac{C_n^2}{C_n^1}\geqslant\frac{C_n^3}{C_n^4}\geqslant\ldots\geqslant\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}.$$

63. In schema Bernoulli $p=\frac{1}{2}$. Să se arate că:

a) $\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant P_{2n}(n)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{2n}(n+h)}{P_{2n}(n)}=e^{-z^2}$,

dacă $\frac{h}{\sqrt{n}}=z\ (0\leqslant z<+\infty)$.

Soluţie. a) Ştiind că $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, obţinem

$$P_{2n}(n)=\frac{(2n)!}{n!\,n!}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}.$$

Dacă în inegalităţile evidente:

$$\frac{\sqrt{2n-1}}{2\sqrt{n}}<\frac{2n-1}{2n}<\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$$

dăm lui n valorile 1, 2, 3, ..., n, obţinem inegalităţile următoare:

$$\frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{1}}<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}<\frac{3}{4}<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}<\frac{5}{6}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}},$$

$$\frac{\sqrt{2n-1}}{2\sqrt{n}}<\frac{2n-1}{2n}<\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}.$$

Făcînd produsul celor n inegalităţi, se obţine

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

adică inegalităţile cerute la pct. a).

b) Observînd că $P_{2n}(n+h)=P_{2n}(n-h)=\frac{2n!}{(n+h)!\,(n-h)!}$, avem

$$\frac{P_{2n}(n\pm h)}{P_{2n}(n)} = \frac{n!\,n!}{(n+h)!\,(n-h)!} = \frac{(n-h+1)(n-h+2)\ldots(n-h+h)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+h)}$$

sau încă

$$\frac{P_{2n}(n\pm h)}{P_{2n}(n)} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{n+1-h}\right)\left(1+\frac{h}{n+2-h}\right)\ldots\left(1+\frac{h}{n}\right)}.$$

Scriind inegalităţile:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{h}{n-h}\right)^h} < \frac{1}{\left(1+\frac{h}{n+1-h}\right)^h} < \frac{1}{\left(1+\frac{h}{n+1-h}\right)\left(1+\frac{h}{n+2-h}\right)\ldots\left(1+\frac{h}{n}\right)} <$$

$$< \frac{1}{\left(1+\frac{h}{n}\right)^n},$$

obţinem

$$\frac{1}{\left(1+\frac{h}{n-h}\right)^h} < \frac{P_{2n}(n\pm h)}{P_{2n}(n)} < \frac{1}{\left(1+\frac{h}{n}\right)^h}.$$

Cum $\frac{h}{\sqrt{n}}=z$, avem $h=z\sqrt{n}$ şi

$$\frac{1}{\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}-z}\right)^{z\sqrt{n}}} < \frac{P_{2n}(n\pm h)}{P_{2n}(n)} < \frac{1}{\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{z\sqrt{n}}}.$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}-z}\right)^{z\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{z\sqrt{n}} = e^{z^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{2n}(n\pm h)}{P_{2n}(n)} = e^{-z^2}.$$

64. Fie $1 \leqslant n \leqslant \min(M,\ N-M)$, $P_k = \dfrac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ şi $W_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, unde $p = \dfrac{M}{N}$. Să se arate că dacă:

$$\Delta_k = \frac{|P_k - W_k|}{P_k}; \quad A = \min(M,\ N-M) \quad \text{şi} \quad \frac{n^2}{A-n} \leqslant \ln 2,$$

atunci

$$\Delta_k \leqslant \frac{8n^2}{A}; \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Soluţie. Să observăm că

$$\frac{W_{k+1} \cdot P_k}{W_k \cdot P_{k+1}} = \frac{1 - \dfrac{n-k-1}{N-M}}{1 - \dfrac{k}{M}};$$

dacă $A = \min(M,\ N-M)$, atunci

$$1 - \frac{n}{A} \leqslant \frac{W_{k+1} \cdot P_k}{W_k \cdot P_{k+1}} \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{n}{A}}, \tag{1}$$

deoarece

$$1 - \frac{n}{A} \leqslant 1 - \frac{n-k-1}{N-M} \leqslant \frac{1 - \dfrac{n-k-1}{N-M}}{1 - \dfrac{k}{M}} \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{k}{M}} \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{n}{A}}.$$

Înlocuind în (1) $k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1$ şi făcînd produsul cît şi unele calcule simple, obţinem

$$\left(1 - \frac{n}{A}\right)^r \cdot \frac{W_0}{P_0} \leqslant \frac{W_r}{P_r} \leqslant \frac{1}{\left(1 - \dfrac{n}{A}\right)^r} \cdot \frac{W_0}{P_0}. \tag{2}$$

Acum să observăm că

$$\frac{W_0}{P_0} = \frac{(1-p)^n \cdot C_N^n}{C_{N-M}^n} = \frac{(1-p)^n}{\left(1 - \dfrac{M}{N}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{M}{N-n+1}\right)},$$

de unde rezultă

$$1 \leqslant \frac{W_0}{P_0} \leqslant \frac{\left(1-\frac{M}{N}\right)^n}{\left(1-\frac{M}{N-M+1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{N-M}\right)^n \cdot \left(\frac{N}{N-n+1}\right)^n}$$

$$1 \leqslant \frac{W_0}{P_0} \leqslant \left(\frac{1-\frac{M}{N}}{1-\frac{M}{N-n+1}}\right)^n = \frac{1}{\left[\left(1-\frac{M}{N-n+1}\right) \cdot \left(\frac{N}{N-M}\right)\right]^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{N-M}\right)^n \cdot \left(\frac{N}{N-n+1}\right)^n} \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{n}{A}\right)^n};$$

ţinînd seama de inegalitatea (2), obţinem

$$\left(1-\frac{n}{A}\right)^n \leqslant \frac{W_r}{P_r} \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{n}{A}\right)^{2n}}$$

sau

$$\left(1-\frac{n}{A}\right)^n - 1 \leqslant \frac{W_r}{P_r} - 1 \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{n}{A}\right)^{2n}} - 1.$$

Se ştie că dacă $0<q<1$, $q^n-1 \geqslant n(q-1)$ şi deci

$$-\frac{n^2}{A} \leqslant \frac{W_r}{P_r} - 1 \leqslant \frac{1-\left(1-\frac{n}{A}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{n}{A}\right)^{2n}} \leqslant \frac{2n^2}{A} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{n}{A}\right)^{2n}}. \qquad (3)$$

Observînd că $\frac{1}{\left(1-\frac{n}{A}\right)^{2n}} \leqslant e^{\frac{2n^2}{A-n}}$ şi ţinînd seama de condiţia dată,

$\frac{n^2}{A-n} \leqslant \ln 2$, rezultă că $\frac{1}{\left(1-\frac{n}{A}\right)^{2n}} \leqslant 4$.

În sfîrşit, înlocuind în (3),

$$-\frac{8n^2}{A} \leqslant \frac{W_r}{P_r} - 1 \leqslant \frac{8n^2}{A} \quad \text{pentru} \quad (r=0,\ 1,\ \ldots\ n)$$

sau

$$\Delta_k = \frac{|W_r - P_r|}{P_r} \leqslant \frac{8n^2}{A}.$$

65. Fie

$$P_k = \frac{C_{N-M}^{k-1}(k-1)!\,M(N-K)!}{N!}$$

și $\pi_k = p(1-p)^{k-1}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, N-M-1)$, unde $p = \frac{M}{N}$.

Să se arate că $\Delta_k \leqslant \frac{2pk^2}{N-M-k}$, dacă $\frac{pk^2}{N-M-K} \leqslant \ln 2$, unde $\Delta_k = \frac{(P_k - \pi_k)}{P_k}$.

Soluție. Dacă $P_k = \frac{C_{N-M}^{k-1}(k-1)!\,M(N-K)!}{N!}$, atunci dezvoltînd C_{N-M}^{k-1}, avem:

$$P_k = \frac{(N-M)!\,M(N-k)!}{(N-M-k+1)!\,N!} \times \frac{M\cdot(N-M-k+2)\cdot(N-M-k+3)\ldots(N-M)}{(N-k+1)\cdot(N-k+2)\cdot(N-k+3)\ldots N};$$

cum

$$p = \frac{M}{N},\quad P_k = p\cdot\frac{N}{N-k+1}\left(1-\frac{M}{N-k+2}\right)\left(1-\frac{M}{N-k+3}\right)\cdots\left(1-\frac{M}{N}\right)$$

sau

$$P_k = p\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{k-1}{N}}\right)\cdot\left(1-\frac{\frac{M}{N}}{1-\frac{k-2}{N}}\right)\cdot\left(1-\frac{\frac{M}{N}}{1-\frac{k-3}{N}}\right)\cdots\left(1-\frac{M}{N}\right) =$$

$$= p\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{k-1}{N}}\right)(1-p)\left(1-\frac{p}{1-\frac{1}{N}}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{1-\frac{k-3}{N}}\right)\left(1-\frac{p}{1-\frac{k-2}{N}}\right)$$

sau

$$P_k = p\left(\frac{1}{1-\frac{k-1}{N}}\right)\prod_{r=0}^{k-2}\left(1-\frac{p}{1-\frac{r}{N}}\right).$$

Pentru citul $\frac{\pi_k}{P_k}$ avem

$$\frac{\pi_k}{P_k} = \frac{p(1-p)^{k-1}}{p\left(\frac{1}{1-\frac{k-1}{N}}\right)\prod_{r=0}^{k-r}\left(1-\frac{p}{1-\frac{r}{N}}\right)} = \left(1-\frac{k-1}{N}\right)\prod_{r=0}^{k-r}\frac{1-p}{1-\frac{p}{1-\frac{r}{N}}}$$

sau

$$\frac{\pi_k}{P_k} = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) \prod_{r=0}^{k-2} \frac{(1-p)\left(1-\frac{r}{N}\right)}{1-p-\frac{r}{N}} = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) \prod_{r=0}^{k-2} \frac{1-p-\frac{r}{N}+\frac{pr}{N}}{1-p-\frac{r}{N}};$$

de unde, simplificînd cu N, obţinem

$$\frac{\pi_k}{P_k} = \left(1-\frac{k-1}{N}\right) \prod_{r=0}^{k-2} \left(1+\frac{pr}{N(1-p)-r}\right).$$

De aici deducem că $\frac{\pi_k}{P_k}$ este cuprins între

$$1 - \frac{k}{N} \leqslant \frac{\pi_k}{P_k} \leqslant \left(1 + \frac{pk}{N(1-p)-k}\right)^k;$$

făcînd diferenţele faţă de 1, avem

$$-\frac{k}{N} \leqslant \frac{\pi_k}{P_k} - 1 \leqslant \left(1 + \frac{pk}{N(1-p)-k}\right)^k - 1.$$

Folosind şirul de inegalităţi

$$(1+q)^k - 1 \leqslant q \cdot (k-1)(1+q)^{k-1} \leqslant qk(1+q)^k$$

şi punînd $q = \frac{pk}{N(1-p)-k}$, găsim

$$-\frac{k}{N} \leqslant \frac{\pi_k}{P_k} - 1 \leqslant \frac{pk^2}{N(1-p)-k} \cdot \left(1 + \frac{pk}{N(1-p)-k}\right)^k.$$

Pe de altă parte, $1+x<e^x$; obţinem:

$$-\frac{k}{N} \leqslant \frac{k}{P_k} - 1 \leqslant \frac{pk^2}{N(1-p)-k} \cdot e^{\frac{pk^2}{N(1-p)-k}}$$

sau

$$\Delta_k \leqslant \frac{pk^2}{N(1-p)-k} e^{\frac{pk^2}{N(1-p)-k}}.$$

Dacă presupunem, acum, $\frac{pk^2}{N(1-p)-k} \leqslant \ln 2$, atunci $\Delta_k \leqslant$ $\leqslant \frac{2pk^2}{N(1-p)-k}$.

66. Să se arate că dacă

$$W_k = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad v_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \text{unde} \quad \lambda = np, \quad \Delta_k = \frac{|W_k - V_k|}{W_k},$$

$$k^2 \leqslant n\varepsilon \quad \text{şi} \quad \lambda^2 \leqslant n\varepsilon, \quad \text{atunci avem} \quad \Delta_k \leqslant \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}.$$

Soluţie. Avem $\frac{W_k}{V_k} = \frac{n!\, p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot K!}{K!\,(n-k)!\,\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}$; înlocuind p cu $\frac{\lambda}{n}$ la numărător, iar la numitor λ cu np, simplificînd, avem

$$\frac{W_k}{V_k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{n^k e^{-\lambda}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Pentru $\frac{V_k}{W_k}$ putem scrie inegalităţile:

$$\frac{1}{e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}} \leqslant \frac{V_k}{W_k} \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \cdot e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}};$$

cum însă

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \leqslant e^{-\lambda} \quad \text{şi} \quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-\lambda} \geqslant e^{-\lambda},$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k \leqslant \frac{V_k}{W_k} \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\lambda}}.$$

Ştiind că $(1-q)^m \geqslant 1-mq$, dacă $q \geqslant 0$ şi $m \geqslant 1$, atunci

$$-\frac{\lambda k}{n} \leqslant \frac{V_k}{W_k} - 1 \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{k^2}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{n}\right)} - 1 = \frac{(k^2+\lambda^2)\,n - k^2\lambda^2}{(n-k^2)(n-\lambda^2)};$$

dacă $k^2 \leqslant n\varepsilon$ şi $\lambda^2 \leqslant n\varepsilon$, atunci

$$\Delta_k \leqslant \frac{2n^2\varepsilon}{n(1-\varepsilon) \cdot n(1-\varepsilon)} \quad \text{sau} \quad \Delta_k \leqslant \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}.$$

67. Pe un segment AB de lungime a se iau la întîmplare două puncte P şi Q. Să se determine probabilitatea ca distanţa PQ să fie mai mică decît b $(b \leqslant a)$.

Soluție. Fie xOy un sistem de coordonate cu originea în A, astfel încît $[A, B]$ să fie pe axa Ox, și x, y abscisele punctelor P, Q. Punctele P și Q, aparținînd segmentului $[A, B]$, punctul de coordonate (x, y) aparține pătratului $(ABCD)$, fig. 2.

Mulțimea cazurilor posibile este formată, deci, din punctele pătratului $(ABCD)$.

Mulțimea cazurilor favorabile este formată din punctele ale căror coordonate verifică condiția $|x-y| \leqslant b$, adică din punctele interioare figurii $AMNCRS$.

Dacă p este probabilitatea cerută, atunci

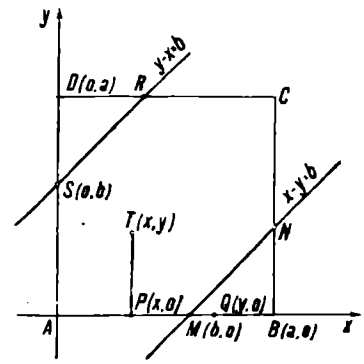

Fig. 2

$$p = \frac{\text{aria}\,(AMNCRS)}{\text{aria}\,(ABCD)} = \frac{a^2-(a-b)^2}{a^2} = 1-\left(1-\frac{b}{a}\right)^2 = 2\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2}.$$

68. Paradoxul lui Bertrand. Intr-un cerc de rază r se alege o coardă la întîmplare. Care este probabilitatea ca lungimea X a coardei să fie cel mult r?

Soluție. Problema comportă două rezolvări, după modul în care înțelegem alegerea la întîmplare a coardei.

a) Să luăm la întîmplare două puncte Y_1 și Y_2, respectiv în intervalele $(0, 2\pi)$ și $(0, r)$. Ducem o rază (fig. 3) cu înclinarea Y_1; la distanța Y_2 de centrul cercului ducem o coardă perpendiculară pe rază. In felul acesta coarda este complet determinată.

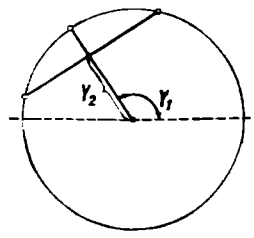

Fig. 3

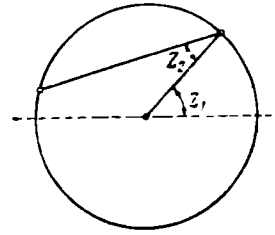

Fig. 4

b) Fie Z_1 și Z_2 două puncte, alese la întîmplare, respectiv în intervalul $(0, 2\pi)$ și $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; să construim o coardă ca în fig. 4.

Lungimea coardei, în cele două cazuri, este dată respectiv prin:

$$X=2\sqrt{r^2-Y_2^2} \qquad X=2r\cos Z_2.$$

Probabilităţile cerute sînt respectiv

$$P(X<r)=P\left\{Y_2>\frac{1}{2}r\sqrt{3}\right\},$$

$$P(X<r)=P\left\{\cos Z_2<\frac{1}{2}\right\}=P\left\{Z_2>\frac{\pi}{3}\right\}.$$

În primul caz probabilitatea cerută este egală cu

$$P(X<r)=\frac{2\pi r\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\pi r}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}134,$$

iar în al doilea caz,

$$P(X<r)=\frac{2\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}{2\pi\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\approx 0{,}333,$$

69. Să se determine probabilitatea ca lungimea unei coarde, într-un cerc de rază R, să fie cuprinsă între a şi b.

Soluţie. Fie cercul de ecuaţie $x^2+y^2=R^2$ şi coarda AB. Dacă păstrăm direcţia OD fixă, atunci coarda AB este determinată prin poziţia punctului D pe raza OC (fig. 5).

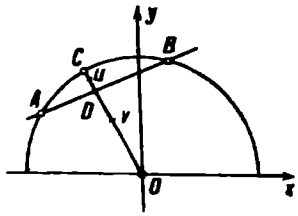

Fig. 5

Fie l lungimea coardei AB şi d distanţa OD; rezultă că

$$d=\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}, \quad a\leqslant l\leqslant b$$

şi

$$\sqrt{R^2-\frac{b^2}{4}}\leqslant d\leqslant\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}.$$

Valorilor $\sqrt{R^2-\frac{b^2}{4}}$ şi $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$ le corespund două puncte U şi V pe raza OC; probabilitatea cerută este probabilitatea ca punctul D să fie în segmentul $[U, V]$, adică

$$P(a\leqslant l\leqslant b)=\frac{\text{lungimea}\,[U,V]}{\text{lungimea}\,[O,C]}=\frac{1}{R}\left[\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}-\sqrt{R^2-\frac{b^2}{4}}\right].$$

Observație. Probabilitatea ca lungimea coardei l să fie cuprinsă între a și $a+da$ este

$$P(a \leqslant l \leqslant a+da) = \frac{1}{R} d\left(\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}\right)_{l=a} = \frac{ada}{2R\sqrt{4R^2-a^2}}.$$

70. Să se afle lungimea probabilă a unei coarde luate la întîmplare dintre coardele unui cerc de rază R.

Soluție. Am arătat în problema 69 că

$$P(a < l < a+da) = \frac{ada}{2R\sqrt{4R^2-a^2}},$$

unde l este lungimea coardei. Lungimea probabilă, în aceste condiții, este dată de

$$l = \int_0^{2R} \frac{a^2 da}{2R\sqrt{4R^2-a^2}}.$$

Punînd $a = 2R\cos\varphi$, rezultă că

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi R}{2}.$$

Deci lungimea probabilă a unei coarde dintr-un cerc este egală cu un sfert din lungimea cercului.

71. Pe un cerc se iau două puncte la întîmplare. Să se determine valoarea medie a distanței dintre cele două puncte.

Soluție. Fie cercul de centru O (fig. 6) și punctul A pe cerc. Fie B al doilea punct, care împreună cu A determină coarda $AB = x$ și arcul $\overset{\frown}{AB}$. Probabilitatea ca punctul M să fie situat pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ fiind p, avem $p = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{AC}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\pi}$.

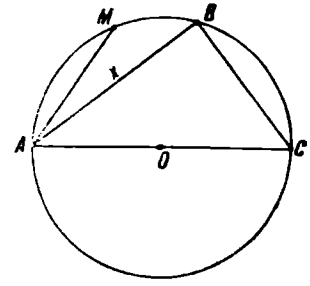

Fig. 6

Cum însă măs $\overset{\frown}{AB} = 2$ măs $\hat{C}$, rezultă $p = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{x}{2R} = P(\overline{AM} \leqslant x)$ și $P(x < \overline{AM} \leqslant x+dx) = \frac{2}{\pi} d\left(\arcsin\frac{x}{2R}\right)$.

Valoarea medie căutată este

$$l=\frac{2}{\pi}\int_0^{2R} x\,\mathrm{d}\left(\arcsin\frac{x}{2R}\right).$$

Punînd $x=2R\sin\theta$, rezultă că

$$l=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{4R}{\pi}.$$

72. Pe o foaie se trasează paralele echidistante şi se aruncă la întîmplare un ac perfect cilindric. Se cere probabilitatea ca acul să întîlnească una dintre paralele.

Această problemă este întîlnită uneori şi sub numele de *problema acului*.

Soluţie. Să notăm cu $2a$ distanţa dintre AB şi CD şi cu $2l$ lungimea acului PQ (fig. 7). Să presupunem că mijlocul M al acului se găseşte pe perpendiculara EF şi fie x lungimea EM ($\overline{EM}<\overline{FM}$ şi $l<a$). Pentru ca acul să poată tăia pe AB este necesar ca $x<l$-

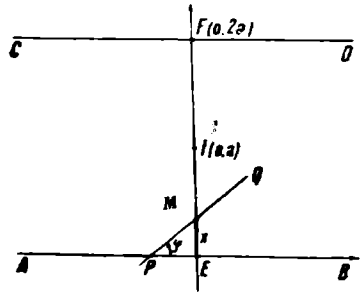

Fig. 7

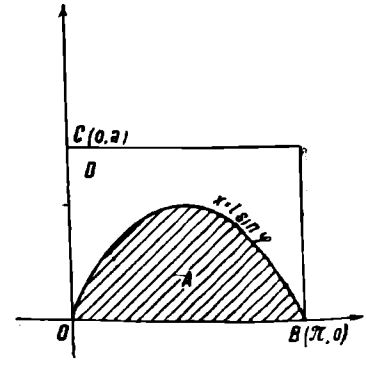

Fig. 8

Am notat cu x distanţa de la mijlocul acului pînă la cea mai apropiată dreaptă şi cu φ unghiul făcut de ac cu această dreaptă. Elementele (x, φ) determinînd complet poziţia acului, mulţimea poziţiilor acului, adică mulţimea perechilor (x, φ), echivalează cu mulţimea punctelor din dreptunghiul D (fig. 8) cu laturile a şi π, deoarece

$$0\leqslant x\leqslant a,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant\pi;$$

pentru ca acul să taie o dreaptă trebuie ca $x\leqslant l\sin\varphi$.

Vom determina în plan aria A (fig. 8) a mulțimii de puncte

$$A=\{(x,\varphi);\ x\leqslant l\sin\varphi\}.$$

Avem $A=\int_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi=2l$ și probabilitatea căutată este

$$p=\frac{A}{D}=\frac{2l}{\pi a}.$$

73. Se dă un pătrat cu latura a, în interiorul căruia se iau două puncte M și M'. Se cere să se afle valoarea medie a pătratului distanței MM'.

Soluție. Fie $M=(x, y)$, $M'=(x', y')$. Avem

$$m=\frac{1}{a^4}\int_0^a\int_0^a\int_0^a\int_0^a[(x-x')^2+(y-y')^2]\,dx\,dy\,dx'dy'.$$

Însă

$$\int_0^a[(x-x')^2+(y-y')^2]\,dx=\frac{(a-x')^3+x'^3}{3}+a(y-y')^2,$$

$$\int_0^a\left[\frac{(a-x')^3+x'^3}{3}+a(y-y')^2\right]dx'=\frac{a^4}{6}+a^2(y-y')^2,$$

$$\int_0^a\int_0^a\left[\frac{a^4}{6}+a^2(y-y')^2\right]dydy'=\frac{a^6}{6}+\frac{a^6}{6}=\frac{a^6}{3}.$$

De unde rezultă că

$$m=\frac{1}{a^4}\cdot\frac{a^6}{3}=\frac{a^2}{3}.$$

74. Oricare ar fi cîmpurile de evenimente A, B, C să se stabilească relațiile:

a) $H(AB)=H(A)+H_A(B)$,

b) $H_A(B)\leqslant H(B)$,

c) $H_{AB}(C)\leqslant H_B(C)$,

unde $H(A)$ este entropia cîmpului A și $H_A(B)$ este entropia cîmpului B condiționată de cîmpul A.

Soluție. Fie A un cîmp finit de evenimente cu desfacerea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și probabilitățile corespunzătoare $P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_n)$. Evident că

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1.$$

În teoria informației se pune problema gradului de nedeterminare a desfacerii considerate; pentru aceasta se introduce o mărime $H(A)$ *care se numește entropia cîmpului* A și care constituie o măsură a nedeterminării sau o cantitate de informație conținută în cîmpul A; ea se definește prin egalitatea

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \log P(A_i),$$

logaritmii luîndu-se în baza doi.

O dată cu cîmpul A se consideră și cîmpul finit B, cu desfacerea $B_1, B_2, \ldots, B_m$ și cu probabilitățile corespunzătoare $P(B_1)$, $P(B_2), \ldots, P(B_m)$; entropia acestui cîmp este

$$H(B) = -\sum_{n=1}^{m} P(B_k) \log P(B_k).$$

Să considerăm cîmpul finit de evenimente AB pe care să-l numim reuniunea cîmpurilor A și B, format cu evenimentele A_iB_k cu probabilitățile $P(A_iB_k)$. *Entropia cîmpului* AB este

$$H(AB) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(A_iB_j) \log P(A_iB_j).$$

Vom defini acum entropia condiționată a cîmpului B, în ipoteza că în cîmpul A a avut loc evenimentul A_i, prin egalitatea

$$H_{A_i}(B) = -\sum_{k=1}^{m} P_{A_i}(B_n) \log P_{A_i}(B_k),$$

unde

$$P_{A_i}(B_k) = \frac{P(A_i \cap B_k)}{P(A_i)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Să observăm că pentru orice eveniment A_i al cîmpului A avem o valoare determinată pentru $H_{A_i}(B)$, pe care o putem considera ca o variabilă aleatoare. *Valoarea medie a acestei variabile aleatoare,*

$$H_A(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot H_{A_i}(B),$$

o vom numi entropia cîmpului B *condiționată de cîmpul* A.

a) Să presupunem întîi că cele două cîmpuri, A și B, sînt independente; atunci

$$-H(AB) = \sum_{i,k} P(A_iB_k) \log P(A_iB_k).$$

Insă

$$P(A_iB_k)=P(A_i)\cdot P(B_k)$$

şi deci

$$-H(AB)=\sum_{i,k}P(A_i)\cdot P(B_k)\,[\log P(A_i)+\log P(B_k)]=$$

$$=\sum_k P(B_k)\cdot\sum_i P(A_i)\log P(A_i)+\sum_i P(A_i)\sum_k P(B_k)\log P(B_k)=$$

$$=-H(A)-H(B).$$

Dacă cele două cîmpuri nu sînt independente, ştim că

$$P(A_iB_k)=P(A_i)\cdot P_{A_i}(B_k)$$

şi deci

$$-H(AB)=\sum_{i,k}P(A_i)\cdot P_{A_i}(B_k)\log[P(A_i)\cdot P_{A_i}(B_k)]=$$

$$=\sum_{i,k}P(A_i)\cdot P_{A_i}(B_k)\,[\log P(A_i)+\log P_{A_i}(B_k)]=$$

$$=\sum_k P_{A_i}(B_k)\cdot\sum_i P(A_i)\log P(A_i)+\sum_i P(A_i)\sum_k P_{A_i}(B_k)\log P_{A_i}(B_k),$$

de unde rezultă că

$$H(AB)=H(A)+H_A(B).$$

b) Să considerăm funcţia

$$f(x)=x\log x$$

care este o funcţie convexă pentru $x>0$. Atunci, pentru orice $x_i>0$, $\lambda_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$, avem

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)\geqslant f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right).\qquad(*)$$

Să observăm că inegalitatea cerută se scrie sub forma

$$\sum_{i=1}^n P(A_i)\sum_{k=1}^m P_{A_i}(B_k)\log P_{A_i}(B_k)\geqslant\sum_{k=1}^m P(B_k)\log P(B_k).$$

In inegalitatea (*) să punem $\lambda_i=P(A_i)$ şi $x_i=P_{A_i}(B_k)$. Atunci

$$\sum_{i=1}^n P(A_i)\sum_{k=1}^m P_{A_i}(B_k)\log P_{A_i}(B_k)=\sum_{k=1}^m\left\{\sum_{i=1}^n P(A_i)\cdot(f(P_{A_i}(B_k)))\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^m f\left(\sum_{i=1}^n P(A_i)\,P_{A_i}(B_k)\right)=\sum_{k=1}^m f(P(B_k))=\sum_{k=1}^m P(B_k)\log P(B_k),$$

deoarece $\sum_{i=1}^m P(A_i)=1$, iar $\sum_{i=1}^n P_{A_i}(B_k)=P(B_k)$.

Am arătat deci că

$$H_A(B) \leqslant H(B).$$

c) Să presupunem că în cîmpul B s-a realizat evenimentul B_k. Atunci cîmpul AC are probabilităţi determinate pentru evenimentele A_iC_j

$$P_{B_k}(A_iC_j) = q(A_iC_j).$$

Analog, cîmpul A devine cîmpul A' cu probabilităţile

$$P_{B_k}(A_i) = q(A_i)$$

şi cîmpul C devine C' cu probabilităţile

$$P_{B_k}(C_j) = q(C_j).$$

După inegalitatea (b) avem

$$H_{A'}(C') \leqslant H(C'), \tag{1}$$

dacă

$$H(C') = -\sum_j q(C_j) \log q(C_j) = -\sum_j P_{B_k}(C_j) \log P_{B_k}(C_j) = H_{B_k}(C). \tag{2}$$

Însă

$$H_{A'}(C') = -\sum_i q(A_i) \sum_j q_{A_i}(C_j) \log q_{A_i}(C_j),$$

unde

$$q_{A_i}(C_j) = \frac{q(A_i \cap C_j)}{q(A_i)} = \frac{P_{B_k}(A_i \cap C_j)}{P_{B_k}(A_i)} = P_{B_kA_i}(C_j);$$

cu alte cuvinte

$$H_{A'}(C') = -\sum_i P_{B_k}(A_i) \sum_j P_{B_kA_i}(C_j) \log P_{B_kA_i}(C_j) =$$

$$= \sum_i P_{B_k}(A_i) H_{B_kA_i}(C). \tag{3}$$

Înlocuind (2) şi (3) în (1), obţinem

$$\sum_i P_{B_k}(A_i) \cdot H_{B_kA_i}(C) \leqslant H_{B_k}(C).$$

Înmulţind acum inegalitatea de mai înainte cu $P(B_k)$ şi sumînd după indicele k, obţinem

$$\sum_{i,k} P(B_k) P_{B_k}(A_i) H_{B_kA_i}(C) \leqslant \sum_k P(B_k) \cdot H_{B_k}(C).$$

Cum însă

$$P(B_k)\,P_{B_k}(A_l)=P(B_k)\cdot\frac{P(A_lB_k)}{P(B_k)}=P(A_lB_k),$$

iar

$$\sum_k P(B_k)\,H_{B_k}(C)=H_B(C),$$

rezultă că

$$\sum_{l,\,k} P(A_lB_k)\,H_{A_lB_k}(C)\leqslant H_B(C)$$

care se mai poate scrie

$$H_{AB}(C)\leqslant H_B(C).$$

Se va observa că din inegalitățile (a) și (b) rezultă că

$$H(AB)\leqslant H(A)+H(B).$$

LEGI DE REPARTIȚIE. COMPUNEREA LEGILOR DE REPARTIȚIE. REPARTIȚII CU MAI MULTE DIMENSIUNI

1. Fie ξ o variabilă aleatoare și a un număr real oarecare. *Probabilitatea ca variabila aleatoare* ξ *să ia valori mai mici decît* a *se numește funcție de repartiție a variabilei* ξ și se notează cu $F(a)$:

$$F(a)=P(\xi<a)$$

și are următoarele proprietăți:

1) $0\leqslant F(a)\leqslant 1$,

2) funcția F este monoton descrescătoare,

3) $F(+\infty)=\lim\limits_{a\to\infty}F(a)=1$ și $F(-\infty)=\lim\limits_{a\to-\infty}F(a)=0$,

4) este continuă la stînga $F(a-0)=F(a)$.

2. *Dacă există o funcție nenegativă* $\rho(x)$ *care verifică, pentru orice* x, *egalitatea*

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(z)\,dz,$$

atunci funcția $\rho(x)$ *se numește densitate de repartiție* a variabilei aleatoare ξ și are următoarele proprietăți:

1) $\rho(x)\geqslant 0$,

2) pentru orice x_1 și x_2 $(x_1<x_2)$ avem

$$P(x_1\leqslant\xi\leqslant x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\,dx,$$

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\,dx=1$.

In mod cu totul analog se definesc *funcția de repartiție și densitatea de repartiție pentru distribuții cu mai multe dimensiuni și cu aceleași proprietăți.*

3. Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție o cunoaștem și $y=\psi(x)$ o funcție monoton crescătoare pentru valorile lui ξ. Să notăm $\eta=\psi(\xi)$. Dacă $f(x)$ este densitatea de repartiție a variabilei aleatoare ξ, iar $\psi(x)$ este derivabilă și $\psi'(x)\neq 0$, atunci, notînd cu $g(y)$ densitatea de repartiție a variabilei $\eta=\psi(\xi)$, avem

$$g(y)=\frac{f(\overset{-1}{\psi}(y))}{|\psi'(\overset{-1}{\psi}(y))|},$$

unde $x=\overset{-1}{\psi}(y)$ este inversa funcției $y=\psi(x)$.

Fie ξ și η două variabile aleatoare și $\zeta=\xi+\eta$ suma lor. Dacă $p(x)$, $q(y)$ și $r(z)$ sînt densitățile de repartiție respectiv ale variabilelor ξ, η și ζ, avem

$$r(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,q(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} p(z-x)\,q(x)\,dx,$$

sau, notînd cu $R(z)$ funcția de repartiție a variabilei ζ, avem

$$R(z)=\iint\limits_{x+y<z} p(x)\,q(y)\,dxdy.$$

Dacă ξ și η sînt independente, pentru funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare $\xi\eta$ și ξ/η obținem:

$$P(\xi\eta<z)=\iint\limits_{xy<z} p(x)\,q(y)\,dxdy$$

și

$$P(\xi/\eta<z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}<z} p(x)\,q(y)\,dxdy;$$

sau, notînd cu $s(z)$ și $g(z)$ densitățile de repartiție corespunzătoare variabilelor $\xi\eta$ respectiv $\frac{\xi}{\eta}$, avem:

$$s(z)=\int_{-\infty}^{\infty} q(y)\,p\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dy}{|y|}$$

și

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} |y|\,q(y)\,p(zy)\,dy.$$

PROBLEME

1. Să se determine constantele A și B, astfel încît funcția

$$F(x)=A+B\operatorname{arctg} x \quad (-\infty<x<\infty)$$

să fie o funcție de repartiție. $\left(\text{Se ia determinarea } -\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{arctg} x\leqslant\frac{\pi}{2}\right.$ pentru $\left.-\infty\leqslant x\leqslant+\infty\right)$.

Soluție. Pentru ca funcția continuă și crescătoare F să fie funcție de repartiție trebuie ca:

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=1 \quad \text{și} \quad \lim_{x\to-\infty}F(x)=0.$$

De unde rezultă că:

$$\lim_{x\to\infty}(A+B\operatorname{arctg} x)=A+B\frac{\pi}{2}=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(A+B\operatorname{arctg} x)=A-B\frac{\pi}{2}=0$$

și deci

$$A=\frac{1}{2}, \quad B=\frac{1}{\pi}.$$

2. Se dă funcția F definită prin relațiile:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ pentru } x<0\\ ax^2, \text{ pentru } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, \text{ pentru } x>1.\end{cases}$$

a) Să se determine constanta a astfel ca F să fie funcție de repartiție.

b) Să se scrie densitatea de repartiție corespunzătoare.

c) Să se calculeze $P(0{,}25<\xi\leqslant 0{,}5)$, unde ξ este o variabilă aleatoare corespunzătoare repartiției F.

Soluție. Observăm că oricare ar fi a, funcția F este continuă în toate punctele axei reale, cu excepția punctului $x=1$.

a) Deoarece o funcție de repartiție este continuă la stînga în orice punct x și $0\leqslant F(x)\leqslant 1$, trebuie ca în punctul $x=1$

$$0\leqslant F(1-0)=F(1)\leqslant 1,$$

de unde rezultă

$$0 \leqslant a \leqslant 1.$$

Dacă în plus cerem ca funcția de repartiție să fie continuă și în punctul $x=1$, atunci trebuie ca $a=1$.

b) Cum densitatea de repartiție este derivata funcției de repartiție, atunci funcția F trebuie să fie derivabilă în toate punctele x, inclusiv în punctul $x=1$. Pentru ca F să aibă această proprietate trebuie ca $a=1$ și atunci densitatea de repartiție este dată de:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x<0 \\ 2x, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, \text{ dacă } x>1. \end{cases}$$

c) Știm că

$$P\{x_1 < \xi \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

și deci

$$P\{0{,}25 < \xi \leqslant 0{,}50\} = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}1875 \cdot a.$$

Graficele funcțiilor de repartiție, respectiv al funcției de densitate, sînt acelea din fig. 9, respectiv fig. 10.

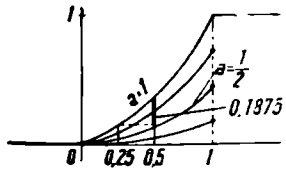

Fig. 9

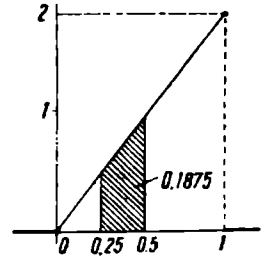

Fig. 10

Aria haşurată din fig. 10 reprezintă probabilitatea cerută la punctul c) pentru cazul $a=1$.

3. Se dă funcția ρ definită astfel

$$\rho(x) = \begin{cases} a\cos x \text{ pentru } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \quad \text{pentru } x < -\frac{\pi}{2} \text{ sau } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Se cere:

a) Să se determine coeficientul a, astfel ca ρ să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare.

b) Să se afle funcția de repartiție corespunzătoare.

c) Să se calculeze $P\left(0<\xi\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$.

Soluție. a) Din proprietățile densității de repartiție rezultă că

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx=2a,$$

de unde

$$a=\frac{1}{2}.$$

b) Fie F funcția de repartiție corespunzătoare; atunci

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(t)\,dt.$$

Dacă $x\leqslant-\frac{\pi}{2}$, cum pentru $-\infty<t\leqslant-\frac{\pi}{2}$, $\rho(t)=0$, rezultă că și $F(x)=0$. Dacă $-\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2}$, atunci

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}\rho(t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\rho(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos t\,dt=\frac{1}{2}(1+\sin x).$$

Să presupunem acum $\frac{\pi}{2}<x<+\infty$; atunci

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}\rho(t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho(t)\,dt+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\rho(t)\,dt=\frac{1}{2}(1+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=1,$$

deoarece pe intervalele $\left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ densitatea este nulă. Deci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(1+\sin x) & \text{pentru } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pentru } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

c) Ştim că

$$P\left(0 < \xi \leqslant \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)$$

şi prin urmare

$$P\left(0 < \xi \leqslant \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Graficul funcţiei de densitate, respectiv al funcţiei de repartiţie este acela din fig. 11, respectiv fig. 12.

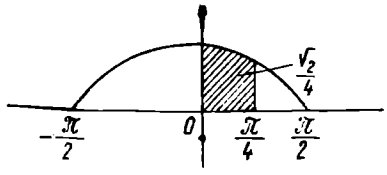

Fig. 11

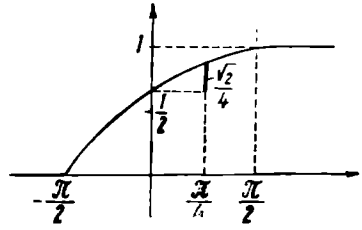

Fig. 12

Aria haşurată din fig. 11 reprezintă probabilitatea cerută la punctul (c).

4. Se dă funcţia ρ definită pe axa reală prin relaţia

$$\rho(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Să se determine:

a) Constanta a astfel, încît ρ să fie o densitate de repartiţie a unei variabile aleatoare ξ.

b) Probabilitatea ca în două observaţii independente ξ să ia valori mai mici decît 1.

Soluție. a) Pentru ca ρ să fie densitate de repartiție trebuie ca

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1.$$

Avem:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx =$$

$$= a\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = a\cdot \operatorname{arctg} t\Big|_0^{\infty} = a\pi,$$

unde $t = e^x$. Rezultă că

$$a = \frac{1}{\pi}.$$

b) Observațiile ξ_1 și ξ_2 făcute asupra variabilei ξ fiind independente, avem:

$$P(\xi_1 < 1,\ \xi_2 < 1) = (P(\xi_1 < 1))^2 = \left(\int_{-\infty}^{1} \rho(x)\,dx\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx\right)^2 = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} = \frac{9}{16}.$$

5. O particulă se mișcă pe axa Ox; la momentul $t=0$, se află în poziția $X(0)=0$. Vom presupune că t, ca variabilă aleatoare, are repartiție uniformă[1]) pe intervalul $0<t<1$ și că particula se deplasează uniform cu viteza V în direcția pozitivă Ox. Să se calculeze funcția de repartiție și densitatea poziției $X(t)$ în momentul arbitrar t, din intervalul $0<t<1$.

Soluție. Fie date valorile pentru t și x și fie t_0 momentul cînd particula începe să se miște; atunci

$$P(X(t) \leqslant x) = P(V(t-t_0) \leqslant x) = P\left(t_0 \geqslant t - \frac{x}{V}\right).$$

Pentru $x > Vt$ avem $t - \frac{x}{V} < 0$, și $P\left(t_0 \geqslant t - \frac{x}{V}\right) = P(t_0 \geqslant 0) = +1$.

[1]) Variabila ξ are repartiție uniformă pe segmentul $[a, b]$, dacă densitatea ei de repartiție este nulă în afara intervalului și egală cu $\frac{1}{b-a}$ în interval

Dacă $0 \leqslant x \leqslant Vt$, cum t are repartiție uniformă, avem

$$P\left(t_0 \geqslant t - \frac{x}{V}\right) = 1 - \left(t - \frac{x}{V}\right) = 1 - t + \frac{x}{V}.$$

Funcția de repartiție este atunci pentru t fix

$$F(x) = \begin{cases} 1 - t + \frac{x}{V}, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant Vt \\ 1, & \text{dacă } x > Vt \end{cases}$$

și se vede că probabilitatea ca în momentul t particula să fie în originea coordonatelor este $1-t$.

Notăm cu $f(x)$ densitatea de repartiție și cu $f_1(x)$, funcția

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant Vt; \\ 0, & Vt < x \end{cases}$$

atunci

$$f(x) = (1-t)\,\delta(x) + \frac{f_1(x)}{V},$$

unde $\delta(x)$ este funcția-delta (sau impulsul elementar) și are definiția

$$\delta(x) = 0 \text{ pentru } x \neq 0$$

și

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 1 \text{ pentru } a < 0 < b.$$

Într-adevăr,

$$F(x) = (1-t) \int_{-\infty}^{x} \delta(u)\,du + \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du;$$

dacă $0 < x \leqslant Vt$, atunci

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(u)\,du = 1, \qquad \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du = x,$$

$$F(x) = 1 - t + \frac{x}{V};$$

iar dacă $x > Vt$, atunci

$$F(x) = 1 - t + \int_0^{Vt} \frac{1}{V}\,du = 1.$$

6. Probabilitatea ca o lampă electronică să iasă din funcțiune după x ore de lucru în intervalul $(x, x+dx)$ este egală cu $0{,}01\,dx$, independent de x. O lampă a lucrat 30 de ore; să se calculeze probabilitatea ca ea să iasă din funcțiune în următoarele 10 ore.

Soluție. Să însemnăm cu X variabila aleatoare care exprimă durata de funcționare a unei lămpi în ore. Fie A evenimentul care constă în faptul că lampa lucrează nu mai puțin de x ore și B evenimentul care constă în faptul că lampa iese din funcțiune în intervalul $(x, x+dx)$. Prin ipoteză $P(B/A)=0{,}01\,dx$.

Să calculăm $P(A)$ și $P(B)$ cu ajutorul funcțiilor de repartiție:

$$P(A)=P(X>x)=1-P(X\leqslant x)=1-F(x)$$

și

$$P(B)=P(x<x\leqslant x+dx)=f(x)\,dx,$$

unde $f(x)$ este densitatea de repartiție. Cum $B\subset A$, avem

$$0{,}01\;dx=P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{f(x)\,dx}{1-F(x)}$$

sau

$$f(x)=0{,}01\,[1-F(x)]=0{,}01\left[1-\int_0^x f(t)\,dt\right].$$

Derivînd în ambii membri, în raport cu x, obținem ecuația diferențială

$$\frac{df}{dx}+0{,}01\;f(x)=0,$$

a cărei soluție este de forma $f(x)=ke^{-0{,}01x}$, $x\geqslant 0$.

Determinăm constanta k prin condiția

$$1=\int_0^\infty f(x)\,dx=k\cdot\int_0^\infty e^{-0{,}01x}\,dx=k\cdot 100;$$

deci

$$f(x)=0{,}01e^{-0{,}01x},\text{ dacă } x\geqslant 0.$$

Atunci probabilitatea cerută este

$$p=\frac{P(30<X\leqslant 40)}{P(30<X)}=\frac{P(40)-F(30)}{1-F(30)}=$$

$$=0{,}01\cdot\frac{\int_0^{40}e^{-0{,}01x}\,dx-\int_0^{30}e^{-0{,}01x}\,dx}{1-\int_0^{30}e^{-0{,}01x}\,dx}=\frac{e^{-0{,}3}-e^{-0{,}4}}{e^{-0{,}3}}=1-e^{-0{,}1}.$$

7. Să se arate că dacă

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx \qquad (0\leqslant x<\infty),$$

atunci:

a) $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^2}{1!\,3}+\frac{x^5}{2!\,5}-\frac{x^7}{3!\,7}+\ldots\right)$

b) $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left\{1+\frac{1}{3}(2x^2)+\frac{1}{3\cdot5}(2x^2)^2+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}(2x^2)^3+\ldots\right\}$

c) $\Phi(x)=1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left\{1-\frac{1}{(2x^2)}+\frac{1\cdot3}{(2x^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2x^2)^3}+\ldots\right\}$.

d) Să se calculeze, folosind primele două egalități, $\Phi(0{,}5)$.

Soluție. Se știe că

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots$$

Integrînd de la 0 la x și înmulțind cu $\frac{e}{\sqrt{\pi}}$, obținem

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x-\frac{x^3}{1!\,3}+\frac{x^5}{2!\,5}-\frac{x^7}{3!\,7}+\ldots\right].$$

Dacă $x=0{,}5$ avem

$$\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{1!\,3}+\frac{x^5}{2!\,5}-\frac{x^7}{3!\,7}+\frac{x^9}{4!\,9}-\ldots\right)_{x=0,5}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}-\frac{1}{5376}+\frac{1}{110\,592}-\ldots=$$

$$=0{,}50000-0{,}04167+0{,}00313-0{,}00019+0{,}00001=0{,}46128$$

și deci

$$\Phi(0{,}5)=0{,}46128\times1{,}12838=0{,}52050.$$

Să scriem

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-x^2}y.$$

Diferențiind, obținem

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y)=e^{-x^2} \quad \text{sau} \quad \frac{dy}{dx}-2xy=1.$$

Înlocuind pe y prin

$$y=x+ax^3+bx^5+cx^7+\ldots$$

şi identificînd, obţinem

$$3a-2=0,$$
$$5b-2a=0,$$
$$7c-2b=0$$
$$\cdots\cdots$$

sau

$$y=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2^2}{3\cdot5}x^5+\ldots$$

şi deci

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left\{1+\frac{1}{3}(2x^2)+\frac{1}{3\cdot5}(2x^2)^2+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}(2x^2)^3+\ldots\right\}.$$

Această serie converge pentru orice x.

Dacă $x=0{,}5$ obţinem

$$\Phi(0{,}5)=1{,}12838\cdot e^{-0{,}25}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot5}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\cdot\frac{1}{2^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\frac{1}{2^4}+\ldots\right\}=1{,}12838\times0{,}778801\times\frac{1}{2}\times\left\{1+\frac{1}{6}+\frac{1}{60}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{840}+\frac{1}{15\,120}+\ldots\right\}=0{,}56419\times0{,}778801\times1{,}184593=0{,}52050.$$

In sfîrşit, $\sqrt{\pi}=2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ şi avem, pentru $x>0$,

$$\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi}\Phi(x)=2\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt=\int_{x^2}^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du,$$

unde $t^2=u\,(x^2=y)$; sau, integrînd prin părţi,

$$\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi}\Phi(x)=\left[-e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{2}\int_y^\infty e^{-y}y^{-\frac{3}{2}}\,dy=$$

$$=e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left[y^{-\frac{3}{2}}e^{-y}\right]_y^\infty+\frac{3}{2}=\int_y^\infty e^{-y}y^{-\frac{5}{2}}\,dy=$$

$$=e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}e^{-y}y^{-\frac{3}{2}}+\frac{1\cdot3}{2^2}e^{-y}y^{-\frac{5}{2}}-\ldots,$$

de unde

$$\Phi(x)=1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left\{1-\frac{1}{(2x^2)}+\frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3}+\dots\right\}.$$

8. Să se arate că dacă $F(x)$ este repartiția variabilei ξ și $D(\xi)$ există, atunci

$$\lim_{x\to\infty} x^2[1-F(x)+F(-x)]=0.$$

Soluție. Avem

$$0\leqslant x^2[1-F(x)+F(-x)]=x^2\left(\int_{-\infty}^{-x} dF(u)+\right.$$

$$\left.+\int_{x}^{+\infty} dF(u)\right)\leqslant \int_{-\infty}^{-x} u^2 dF(u)+\int_{x}^{+\infty} u^2 dF(u).$$

Prin definiție, $D^2(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)-\left(\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)\right)^2$ și spunem că $D(\xi)$ există, dacă $D(\xi)<+\infty$.

Din faptul că $D(\xi)$ există, rezultă că integralele din membrul al doilea sînt convergente. Trecînd la limită pentru $x\to\infty$, rezultă afirmația de mai înainte.

9. Fie $F(x)$ funcția de repartiție a unei variabile aleatoare ξ; să se arate că dacă $D(\xi)$ există, atunci

$$D^2(\xi)=2\int_0^{\infty} x[1-F(x)+F(-x)]\,dx-M_1^2(\xi).$$

Soluție. Se știe că

$$D^2(\xi)=M_2(\xi)-M_1^2(\xi),$$

unde

$$M_2(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dF(u)=\int_{-\infty}^{0} u^2 dF(u)+\int_0^{\infty} u^2 dF(u).$$

Ținînd seama de exercițiul precedent, rezultă că

$$\int_0^{\infty} u^2 dF(u)=x^2[F(x)-F(-x)-1]\Big|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} u[1-F(u)]\,du=$$

$$=2\int_0^{\infty} u[1-F(u)]\,du.$$

Analog,

$$\int_{-\infty}^{0} u^2 \mathrm{d}F(u) = 2\int_{0}^{\infty} u\,F(-u)\,\mathrm{d}u;$$

prin adunare rezultă că

$$M_2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{d}F(u) = 2\int_{0}^{\infty} u\,[1-F(u)+F(-u)]\,\mathrm{d}u$$

şi deci

$$D^2(\xi) = 2\int_{0}^{\infty} u\,[1-F(u)+F(-u)]\,\mathrm{d}u - M_1^2(\xi).$$

10. Fie ξ o variabilă aleatoare cu distribuţie uniformă în intervalul (0,1). Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei $\eta = \ln\frac{1}{\xi}$.

Soluţie. Funcţia de repartiţie a variabilei ξ este

$$P(\xi<x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0\leqslant x<1 \\ 1, & 1\leqslant x. \end{cases}$$

Pentru variabila η avem:

$$P(\eta<x) = P\left(\ln\frac{1}{\xi}<x\right) = P\left(\frac{1}{\xi}<e^x\right) = 1-P(\xi\leqslant e^{-x}),$$

de unde

$$P(\eta<x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x<0 \\ 1-e^{-x}, & \text{dacă } x\geqslant 0. \end{cases}$$

Rezultă că densitatea variabilei η este

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x<0 \\ e^{-x}, & \text{dacă } x\geqslant 0. \end{cases}$$

11. Fie variabila ξ cu densitatea normală (0,1)

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilelor:

a) $\eta=3|\xi|$

b) $\eta=e^{\xi^2}$.

Soluție. a) Știm că $F(x)=P(\xi<x)$ și că

$$F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt;$$

$$p_\xi(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}=\frac{d}{dx}F_\xi(x).$$

Funcția de repartiție a variabilei η este

$$F_\eta(x)=P(\eta<x)=P\left(|\xi|<\frac{x}{3}\right)=P\left(\xi<\frac{x}{3}\right)-P\left(\xi\leqslant-\frac{x}{3}\right)$$

sau

$$F_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\frac{x}{3}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\int_{-\infty}^{-\frac{x}{3}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}.$$

Rezultă că

$$p_\eta(x)=\frac{d}{dx}F_\eta(x)=\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{18}}.$$

b) Observăm că $e^{\xi^2}>1$, deci pentru orice $x>1$ avem (ln fiind logaritmul natural)

$$F_\eta(x)=P(e^{\xi^2}<x)=P(-\sqrt{\ln x}<\xi<\sqrt{\ln x})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\sqrt{\ln x}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\int_{-\infty}^{-\sqrt{\ln x}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\},$$

de unde rezultă

$$p_\eta(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi x\cdot\ln x}}.$$

12. Fie ξ variabila aleatoare cu densitatea normală (0, 1)

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilei

$$\eta = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Soluție. Vom determina mai întîi funcția de repartiție a variabilei η:

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\left(\frac{1}{1+\xi^2} < x\right) = P\left(\frac{1-x}{x} < \xi^2\right)$$

sau

$$F_\eta(x) = P\left\{\left(\xi < -\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \cup \left(\xi > \sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right\} =$$

$$= P\left(\xi < -\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + P\left(\xi > \sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Densitatea de repartiție a variabilei η este

$$p_\eta(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)' \cdot e^{-\frac{1-x}{2x}}, \text{ dacă } 0 < x < 1.$$

Derivînd, obținem

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x(1-x)}}\, e^{-\frac{1-x}{2x}}, \text{ dacă } 0 < x < 1.$$

13. Fie ξ o variabilă aleatoare normală (m, σ). Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilei $\eta = e^\xi$.

Soluție. Dacă notăm cu $\psi(y) = e^y$ și cu $p(y)$ densitatea de repartiție a variabilei aleatoare e^y, știind că y este o valoare a variabilei normale ξ, deducem

$$p(y) = \frac{f(\overset{-1}{\varphi}(y))}{|\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(y))|},$$

unde $f(x)$ este densitatea de repartiție a variabilei ξ.

Dacă în scrierea formulei de inversiune facem să apară variabilele aleatoare, atunci putem scrie că

$$p(\eta) = f(\xi(\eta)) \cdot \left|\frac{d\xi}{d\eta}\right|,$$

unde f este densitatea variabilei ξ.

Avem $\overset{-1}{\psi}(y)=\ln y$ şi $\psi'\left(\overset{-1}{\psi}(y)\right)=\frac{1}{y}$ şi deci

$$\rho(y)=\begin{cases}0, & \text{dacă } y\leqslant 0\\ \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{dacă } y>0.\end{cases}$$

14. Fie ξ o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiţie

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{dacă } x>0\\ 0, & \text{dacă } x\leqslant 0,\end{cases}$$

unde λ este o constantă pozitivă. Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei $\eta=e^{-\xi}$.

Soluţie. In acest caz

$$\psi(y)=e^{-y},\quad f(\overset{-1}{\psi}(y))=\begin{cases}\lambda e^{\lambda \ln y}, & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}$$

şi

$$\psi'(\overset{-1}{\psi}(y))=y,$$

de unde

$$\rho(y)=\frac{\lambda e^{\lambda \ln y}}{y}=\lambda y^{\lambda-1},\quad \text{dacă } y\in[0,1].$$

15. Fie variabila aleatoare ξ cu repartiţie uniformă în intervalul (0,1). Să se calculeze densităţile de repartiţie ale variabilelor:

$$\text{a) } \eta=\xi^3;\quad \text{b) } \eta=\sqrt[3]{\xi};\quad \text{c) } \eta=\frac{1}{\xi}.$$

Soluţie. Folosind formula

$$\rho_{\varphi(\xi)}(z)=\frac{\rho_\xi(\overset{-1}{\varphi}(z))}{|\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(z))|}$$

şi ştiind că

$$\rho_\xi(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ 1, & 0<z\leqslant 1\\ 0, & 1<z\end{cases}$$

a) $\rho_{\xi^3}(z)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}, & \text{dacă } 0<z\leqslant 1\\ 0, & \text{în celelalte cazuri.}\end{cases}$

b) $\rho_{\sqrt{\xi}}(z)=\begin{cases}2z, & \text{dacă } 0<z\leqslant 1\\ 0, & \text{în celelalte cazuri.}\end{cases}$

c) $\rho_{\frac{1}{\xi}}(z)=\frac{1}{z^2}$, dacă $z\geqslant 1$.

16. Măsurînd diametrul unui cerc, se obțin diferite rezultate care reprezintă aproximativ lungimea diametrului. Rezultatele măsurătorilor pot fi interpretate ca valori ale unei variabile aleatoare. Știind că această variabilă aleatoare are repartiție uniformă în intervalul (a, b), de lungime 1, să se determine repartiția ariei cercului.

Soluție. Mărimea diametrului „d" avînd repartiția uniformă în intervalul (a, b), densitatea de repartiție este

$$\rho_d(x)=\begin{cases}1, & a<x\leqslant b\\ 0, & x\leqslant a,\quad x>b.\end{cases}$$

Dacă notăm cu s aria cercului, atunci

$$s=\frac{\pi}{4}\cdot d^2 \quad \text{și} \quad d=2\sqrt{\frac{s}{\pi}}$$

și pentru funcțiile de repartiție avem relația

$$F_s(x)=F_d\left(2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x<\frac{\pi}{4}a^2\\ 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}, & \text{dacă } \frac{\pi}{4}a^2\leqslant x<\frac{\pi}{4}b^2\\ 1, & \text{dacă } \frac{\pi}{4}b^2<x,\end{cases}$$

unde F_d este funcția de repartiție a diametrului și $0<a<b$.

17. Fie

$$\rho(x, y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

densitatea de repartiție bidimensională a variabilelor independente ξ și η. Să se determine:

a) Funcția de repartiție.

b) Probabilitatea ca $((x, y) \in D)$, unde D este pătratul construit pe segmentele $[0, 1]$ şi $[0, 1]$.

Soluţie. Pentru funcţia de repartiţie avem

$$F(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y+\frac{1}{2}\right),$$

iar

$$P((x, y)\in D)=\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\int_{0}^{1}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{16}.$$

18. Se dă funcţia

$$\rho(x, y)=ke^{-\varphi(x-\alpha,\ y-\beta)},$$

unde $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$ şi

$$\varphi(x-\alpha,\ y-\beta)=a(x-\alpha)^2+2b(x-\alpha)(y-\beta)+c(y-\beta)^2$$

este o formă de gradul al doilea, pozitiv definită. Să se determine constanta k astfel ca $\rho(x, y)$ să fie o densitate de repartiţie. Aceasta este *repartiţia gaussiană cu două dimensiuni.*

Soluţie. Transformarea liniară

$$\begin{aligned}x-\alpha&=a_1\xi+b_1\eta\\ y-\beta&=a_2\xi+b_2\eta\end{aligned},\qquad \delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

aduce pe φ la forma canonică

$$\varphi(x-\alpha,\ y-\beta)=\xi^2+\eta^2.$$

Se ştie că discriminantul formei $\xi^2+\eta^2$, care este egal cu 1, este dat de: $1=(ac-b^2)\delta^2$, de unde $\delta=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}$ (forma φ fiind pozitiv definită, $ac-b^2>0$).

Pentru ca $\rho(x, y)$ să fie densitate de repartiţie trebuie ca

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x, y)\,dxdy=1.$$

Făcînd schimbarea de variabile de mai înainte, obținem

$$1=k\delta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi^2+\eta^2)}\,d\xi d\eta=k\delta\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi\right)^2.$$

Insă $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi}$ şi deci $1=k\delta\pi$.

Cum $\delta=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}$, rezultă că $k=\frac{1}{\pi\delta}=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}$ şi prin urmare

$$\rho(x,\ y)=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}e^{-[a(x-\alpha)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)+c(y-\beta)^2]}.$$

19. Se dă funcţia

$$\rho(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=k_n\cdot e^{-\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}(x_i-a_i)\ xk-ak)},$$

unde k_n este o constantă, $-\infty<x_i<+\infty$, $i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ şi $\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}x_i'x_k'$ este o formă pătratică pozitiv definită cu discriminantul Δ. Se cere să se calculeze coeficientul k_n, astfel ca ρ să fie o densitate de repartiţie.

Aceasta este *legea gaussiană cu n dimensiuni.*

Soluţie. Pentru determinarea lui k_n să facem schimbarea de variabile

$$x_i'=x_i-\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}h_{ij}\xi_j$$

cu determinantul

$$\delta=|h_{ij}|\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Această transformare va reduce forma pătratică la forma canonică

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2.$$

In plus avem $\Delta\cdot\delta^2=1$ şi deci

$$k_n\delta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)}\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_n=1$$

sau

$$k_n\delta\left(\sqrt{\pi}\right)^n=1.$$

de unde

$$k_n=\sqrt{\frac{\Delta}{\pi^n}}.$$

20. Fie $\xi=f(\omega)$ şi $\eta=g(\omega)$ două variabile aleatoare definite pe cîmpul de probabilităţi $\{K, \Omega, P\}$, A şi ε două numere, dintre care $\varepsilon>0$. Să se arate că

$$|P\{\omega;\ f(\omega)<A\}-P\{\omega;\ g(\omega)<A\}|\leqslant F(A+\varepsilon)-F(A-\varepsilon)+$$
$$+P\{\omega;\ |f(\omega)-g(\omega)|\geqslant\varepsilon\},$$

unde F este funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ.

Soluţie. Incluziunea următoare se verifică fără dificultate,

$$\{\omega;\ f(\omega)<A,\ g(\omega)\geqslant A\}\cup\{\omega;\ f(\omega)\geqslant A,\ g(\omega)<A\}\subseteq$$
$$\subseteq\{\omega;\ A-\varepsilon<f(\omega)<A+\varepsilon\}\cup\{\omega;\ |f(\omega)-g(\omega)|\geqslant\varepsilon\},$$

de unde rezultă inegalitatea între probabilităţi

$$P(f<A,\ g\geqslant A)+P(f\geqslant A,\ g<A)\leqslant F(A+\varepsilon)-F(A-\varepsilon)+$$
$$+P(|f-g|\geqslant\varepsilon). \qquad (*)$$

Din descompunerea evenimentului $\{\omega;\ f(\omega)<A\}$ în

$$\{\omega;\ f(\omega)<A,\ g(\omega)<A\}\cup\{\omega;\ f(\omega)<A,\ g(\omega)\geqslant A\},$$

obţinem

$$P(f<A)=P(f<A,\ g<A)+P(f<A,\ g\geqslant A).$$

Analog,

$$P(g<A)=P(f<A,\ g<A)+P(f\geqslant A,\ g<A),$$

de unde rezultă

$$P(f<A)-P(g<A)=P(f<A,\ g\geqslant A)-P(f\geqslant A,\ g<A)\leqslant$$
$$\leqslant P(f<A,\ g\geqslant A)+P(f\geqslant A,\ g<A).$$

Permutînd f cu g, obţinem

$$P(g<A)-P(f<A)\leqslant P(f<A,\ g\geqslant A)+P(f\geqslant A,\ g<A).$$

Din ultimele două inegalităţi şi din inegalitatea (*) rezultă inegalităţile care dau răspuns problemei:

$$|P(f<A)-P(g<A)|\leqslant P(f<A,\ g\geqslant A)+$$
$$+P(f\geqslant A,\ g<A)\leqslant F(A+\varepsilon)-F(A-\varepsilon)+P(|f-g|\geqslant\varepsilon).$$

21. In distribuţia bidimensională

$$dF = C_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho x_1 x_2}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} dx_1 \cdot dx_2\ ^{1}) -$$

$$-\infty < x_1,\ x_2 < \infty,$$

unde C_0 este o constantă, să se efectueze schimbarea de variabile:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sigma_1} - \frac{\rho x_2}{\sigma_2},\quad \xi_2 = (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \frac{x_2}{\sigma_2}.$$

Ce devine distribuţia?

Soluţie. Dacă $dF = f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$,

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2),\quad x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2),$$

atunci

$$dF = f(x_1(\xi_1, \xi_2),\ x_2(\xi_1, \xi_2))\, J\, d\xi_1 d\xi_2,$$

unde J este jacobianul

$$J = \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix}.$$

In cazul de mai înainte calculăm jacobianul $\left|\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right| = \frac{1}{J}$:

$$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & -\frac{\rho}{\sigma_2} \\ 0 & (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma_2} \end{vmatrix} = \frac{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Cum

$$\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} = \xi_1^2 + \xi_2^2,$$

distribuţia se scrie

$$dF = \frac{C_0 \sigma_1 \sigma_2}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)}\, d\xi_1\, d\xi_2.$$

---

[1]) exp u înseamnă e^u.

22. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente, cu repartiţie uniformă în intervalul $[a, b]$. Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei $\xi + \eta$.

Soluţie. Densitatea de repartiţie a variabilelor ξ şi η este dată prin:

$$\rho_\xi(x) = \rho_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin [a, b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă } x \in [a, b]. \end{cases}$$

Dacă notăm cu $\rho(z)$ densitatea de repartiţie a sumei $\xi + \eta$, avem

$$\rho(z) = \int_a^b \rho_\xi(u) \cdot \rho_\eta(z-u)\, du = \frac{1}{b-a} \int_a^b \rho_\eta(z-u)\, du.$$

In integrala obţinută facem schimbarea de variabilă $z-u=t$ şi avem

$$\rho(z) = \frac{1}{b-a} \int_{z-b}^{z-a} \rho_\eta(t)\, dt,$$

unde $2a \leqslant z \leqslant 2b$.

Dacă $z-b<a$, adică $z<a+b$, atunci $z-a<b$, şi descompunînd integrala, avem

$$\rho(z) = \frac{1}{b-a}\left(\int_{z-b}^{a} \rho_\eta(t)\, dt + \int_a^{z-a} \rho_\eta(t)\, dt \right) = \frac{z-2a}{(b-a)^2}.$$

Dacă $z-b>a$, atunci $z-a<b$ şi avem descompunerea

$$\rho(z) = \frac{1}{b-a}\left(\int_{z-b}^{b} \rho_\eta(t)\, dt + \int_b^{z-a} \rho_\eta(t)\, dt \right) = \frac{2b-z}{(b-a)^2}.$$

Adunînd rezultatele, formăm funcţia $\rho(z)$ care determină densitatea variabilei $\xi + \eta$:

$$\rho(z) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } z \leqslant 2a \\ \dfrac{z-2a}{(b-a)^2}, & \text{dacă } 2a < z \leqslant a+b \\ \dfrac{2b-z}{(b-a)^2}, & \text{dacă } a+b < z \leqslant 2b \\ 0, & \text{dacă } 2b < z. \end{cases}$$

Densitatea de repartiţie găsită se numeşte *legea de repartiţie a lui Simpson.*

23. Fie ξ_1, ξ_2, ξ_3 trei variabile aleatoare independente, avînd distribuţii uniforme în intervalul $[-1, 1]$.

Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

Soluţie. Pentru calculul densităţii variabilei η vom nota $\zeta = \xi_1 + \xi_2$; atunci

$$\eta = \zeta + \xi_3,$$

densităţile variabilelor ξ_3 şi ζ fiind respectiv

$$\rho_{\xi_3} = \begin{cases} 0, & x \notin [-1, 1] \\ \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1] \end{cases} \qquad \rho_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-2, 2] \\ \frac{x+2}{2^2}, & -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{2-x}{2^2}, & 0 < x \leqslant 2; \end{cases}$$

ρ_ζ se găseşte uşor, ţinîndu-se seamă de rezultatul exerciţiului precedent.

Densitatea variabilei η este

$$\rho_\eta(z) = \int_{-1}^{1} \rho_{\xi_3}(u) \cdot \rho_\zeta(z-u)\, du = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \rho_\zeta(z-u)\, du.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $z-u=t$, avem:

$$\rho_\eta(z) = \frac{1}{2} \int_{z-1}^{z+1} \rho_\zeta(t)\, dt. \qquad (*)$$

a) Pentru $z-1<-2$, şi $z+1<-1$, descompunem integrala astfel

$$\rho_\eta(z) = \frac{1}{2}\left(\int_{z-1}^{-2} \rho_\zeta(t)\, dt + \int_{-2}^{z+1} \rho_\zeta(t)\, dt \right);$$

ţinînd seama de valorile densităţii ρ_ζ pe intervalul $(-2, 0]$, avem:

$$\rho_\eta(z) = \frac{1}{2} \int_{-2}^{z+1} \frac{t+2}{2^2}\, dt = \frac{(z+3)^2}{16}.$$

b) Dacă $-2 < z-1 \leqslant 0$, atunci $z+1 \leqslant 2$ şi integrala $(*)$ se descompune astfel

$$\rho_\eta(z) = \frac{1}{2}\left(\int_{z-1}^{0} \rho_\zeta(t)\, dt + \int_{0}^{z+1} \rho_\zeta(t)\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{z-1}^{0} \left(\frac{t+2}{2^2}\right) dt + \int_{0}^{z+1} \left(\frac{2-t}{2^2}\right) dt \right) = \frac{3-z^2}{8}.$$

c) Dacă $0 \leqslant z-1 \leqslant 2$, adică $1 \leqslant z \leqslant 3$, atunci

$$\rho_\eta(z) = \frac{1}{2}\left(\int_{z-1}^{2} \rho_\xi(t)\,dt + \int_{2}^{z+1} \rho_\xi(t)\,dt \right) = \frac{1}{2} \int_{z-1}^{2} \frac{2-t}{2^2}\,dt = \frac{(3-z)^2}{16}.$$

Densitatea de repartiție este

$$\rho_\eta(z) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } z < -3 \\ \frac{(z+3)^2}{16}, & \text{dacă } -3 \leqslant z < -1 \\ \frac{3-z^2}{8}, & \text{dacă } -1 \leqslant z < 1 \\ \frac{3-z^2}{16}, & \text{dacă } 1 \leqslant z < 3 \\ 0, & \text{dacă } 3 \leqslant z. \end{cases}$$

24. Fie ξ și η două variabile independente cu distribuții uniforme în intervalul $(-1, +1)$. Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilei $\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Soluție. Știind funcțiile de densitate ale variabilelor ξ și η, vom calcula mai întîi funcția de repartiție a variabilei $\psi = \xi^2 + \eta^2$ și apoi vom trece la calculul densității de repartiție a variabilei $\zeta = \sqrt{\psi}$.

Pentru variabilele ξ și η avem:

$$\rho_\xi(x) = \rho_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 < x \leqslant 1 \\ 0, & 1 < x, \end{cases}$$

iar pentru variabilele ξ^2 și η^2 densitățile se deduc după legea:

$$\rho_{\varphi(\xi)}(y) = \frac{\rho_\xi(\overset{-1}{\varphi}(y))}{|\varphi'(\overset{-1}{\varphi}(y))|} \qquad (*)$$

funcțiunea $\varphi(x) = x^2$ fiind inversabilă separat pe $(0, 1)$ și pe $(-1, 0)$ avem:

$$\rho_{\xi^2}(z) = \rho_{\eta^2}(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{z}}, & 0 < z \leqslant 1 \\ 0, & 1 < z. \end{cases}$$

Pentru variabila $\psi=\xi^2+\eta^2$, densitatea de repartiție se calculează prin

$$\rho_\psi(z)=\int_0^1 \rho_{\eta^2}(u)\,\rho_{\xi^2}(z-u)\,du.$$

Pentru calculul $\rho_\psi(z)$ avem:

a) Dacă $0<z\leqslant 1$, atunci

$$\rho_\psi(z)=\int_0^z \rho_{\eta^2}(u)\,\rho_{\xi^2}(z-u)\,du+\int_z^1 \rho_{\eta^2}(u)\,\rho_{\xi^2}(z-u)\,du;$$

cum a doua integrală este nulă, rămîne

$$\rho_\psi(z)=\int_0^z \frac{1}{4\sqrt{u(z-u)}}\,du+\frac{1}{4}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

b) Dacă $1<z\leqslant 2$, atunci

$$\rho_\psi(z)=\int_0^{z-1} \rho_{\eta^2}(u)\,\rho_{\xi^2}(z-u)\,du+\int_{z-1}^1 \rho_{\eta^2}(u)\,\rho_{\xi^2}(z-u)\,du;$$

cum prima integrală este nulă, rămîne

$$\rho_\psi(z)=\frac{1}{4}\int_{z-1}^1 \frac{1}{\sqrt{u(z-u)}}\,du+\frac{1}{4}\int_{1-\frac{2}{z}}^{\frac{2}{z}-1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{z}-1\right).$$

Știind că $\arcsin\left(\frac{2}{z}-1\right)=2\arcsin\frac{1}{\sqrt{z}}-\frac{\pi}{2}$, avem

$$\rho_\psi(z)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{z}}-\frac{\pi}{4}.$$

Reunind rezultatele, obținem:

$$\rho_\psi(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ \frac{\pi}{4}, & 0<z\leqslant 1\\ \arcsin\frac{1}{\sqrt{z}}-\frac{\pi}{4}, & 1<z\leqslant 2\\ 0, & 2<z.\end{cases}$$

Știind că $\zeta=\sqrt{\psi}$, avem după formula (*)

$$\rho_\zeta(z)=\frac{\rho_\psi(z^2)}{\frac{1}{2\sqrt{z^2}}}=2z\,\rho_\psi(z^2),$$

de unde deducem:

$$\rho_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ \frac{\pi}{2}z, & 0<z\leqslant 1\\ z\left(2\arcsin\frac{1}{z}-\frac{\pi}{2}\right), & 1<z\leqslant 2\\ 0, & 2<z.\end{cases}$$

25. Fie ξ și η două variabile aleatoare independente; ξ are distribuție normală cu densitatea $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ și η are densitatea $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ unde $-\infty<x<+\infty$. Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilelor $\xi+\eta$ și $\xi-\eta$.

Soluție. Densitatea de repartiție este

$$\rho(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|u|}e^{-\frac{(z-u)^2}{2}}\,du$$

sau, descompunînd în două integrale, pe semidreptele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$,

$$\rho(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left\{\int_0^{\infty}e^{-\left(u+\frac{(z+u)^2}{2}\right)}du+\int_0^{\infty}e^{-\left(u+\frac{(z-u)^2}{2}\right)}du\right\}.$$

Făcînd în prima integrală schimbarea de variabilă

$$u+z+1=t,$$

iar în a doua integrală

$$u-z+1=t,$$

se obține

$$\rho(z)=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}\left\{e^{z}\int_{z+1}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+e^{-z}\int_{-(z-1)}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}.$$

Dacă notăm cu

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\qquad -\infty<z<+\infty,$$

atunci

$$p(z)=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\{e^{z}\Phi(-(z+1))+e^{-z}\Phi(z-1)\}.$$

26. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente avînd densităţile respectiv $\lambda e^{-\lambda x}$ şi $\mu e^{-\mu x}$ cu $x>0$, $\lambda>0$ şi $\mu>0$.

Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei $\frac{\xi}{\eta}$.

Soluţie. Densitatea variabilei $\frac{\xi}{\eta}$ este

$$p(z)=\int_0^{\infty}|u|\lambda e^{-\lambda u}\mu e^{-\mu z u}\,du=\lambda\mu\int_0^{\infty}ue^{-u(\lambda+\mu z)}\,du.$$

Integrînd prin părţi, avem

$$p(z)=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu z}\int_0^{\infty}e^{-u(\lambda+\mu z)}\,du,$$

de unde

$$p(z)=\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu z)^2},\qquad 0<z<+\infty.$$

27. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente avînd aceeaşi densitate de repartiţie, $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty<x<\infty$. Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei $\frac{\xi}{\eta}$.

Soluţie. Densitatea de repartiţie a variabilei $\frac{\xi}{\eta}$ este

$$p(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|u|p(u)\cdot q(uz)\,du,$$

unde p şi q sînt densităţile respectiv ale lui ξ şi η. In cazul nostru

$$p(z)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}|u|\cdot e^{-|u|}\cdot e^{-|uz|}du$$

şi dezvoltînd calculele avem

$$p(z)=\frac{1}{4}\left\{\int_{-\infty}^{0}-ue^{u(1+|z|)}du+\int_0^{\infty}ue^{-u(1+|z|)}du\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-u(1+|z|)}du.$$

Integrînd prin părţi, se obţine

$$\rho(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+|z|)^2},\quad -\infty<z<+\infty.$$

28. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente cu repartiţie uniformă în intervalul (0, 1). Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei $\frac{\xi}{\eta}$.

Soluţie. Densitatea variabilei ξ este

$$\rho_\xi(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\ 1)\\ 0, & x\notin(0,\ 1)\end{cases}$$

dacă $\rho(z)$ este densitatea variabilei $\frac{\xi}{\eta}$, atunci

$$\rho(z)=\int_0^1 |u|\cdot\rho_\xi(u)\cdot\rho_\xi(uz)\,du=\int_0^1 u\rho_\xi(uz)\,du=\frac{1}{z^2}\int_0^z u\rho_\xi(u)\,du.$$

Pentru $\rho(z)$ obţinem:

$$\rho(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{dacă}\quad 0<z\leqslant 1\\ \frac{1}{2z^2}, & \text{dacă}\quad 1<z.\end{cases}$$

29. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente cu repartiţii Cauchy $\rho_\xi(x)=\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ şi $\rho_\eta(x)=\frac{b}{\pi(b^2+x^2)}$, $-\infty<x<+\infty$. Să se calculeze densitatea variabilei $\zeta=\xi+\eta$.

Soluţie. Densitatea variabilei ζ este

$$\rho_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{\pi(a^2+u^2)}\cdot\frac{b}{\pi(b^2+(z-u)^2)}\,du=$$

$$=\frac{ab}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+u^2)(b^2+(z-u)^2)}\,du.$$

Descompunînd fracţia de sub semnul „integrală" în elemente simple de forma

$$\frac{\alpha u+\beta}{a^2+u^2}+\frac{\gamma(z-u)+\delta}{b^2+(z-u)^2},$$

unde coeficienţii α, β, δ, au valorile:

$$\alpha=\gamma,\ \beta=\frac{-a^2+b^2+z^2}{[(a+b)^2+z^2][(a-b)^2+z^2]},\quad \delta=\frac{a^2-b^2-z^2}{[(a+b)^2+z^2][(a-b)^2+z^2]},$$

obţinem pentru ρ_ζ

$$\rho_\zeta(z)=\frac{ab}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\beta}{a}+\frac{\delta}{b}\right)\pi=\frac{b\beta+a\delta}{\pi}.$$

Cum

$$b\beta+a\delta=\frac{(a+b)\,(z^2+(a-b)^2)}{[(a+b)^2+z^2]\,[(a-b)^2+z^2]},$$

rezultă densitatea variabilei ζ:

$$\rho_\zeta(z)=\frac{a+b}{\pi[(a+b)^2+z^2]},\quad -\infty<z<+\infty.$$

30. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente care au aceeaşi densitate de repartiţie, $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ pentru $-\infty<x<+\infty$. Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei $\zeta=\xi+\eta$.

Soluţie.

$$\rho(z)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|u|}\cdot e^{-|z-u|}du.$$

Considerăm cele două cazuri, după cum $z<0$ sau $z>0$.

a) Dacă $z<0$, atunci

$$\rho(z)=\frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{z}e^{-z+2u}du+\int_{z}^{0}e^{z}du+\int_{0}^{\infty}e^{z-2u}du\right),$$

de unde

$$\rho(z)=-\frac{e^z(1-z)}{4}.$$

b) Dacă $z>0$, atunci printr-o descompunere analogă cu cea de mai înainte obţinem

$$\rho(z)=\frac{e^{-z}(1+z)}{4}$$

sau

$$\rho(z)=\frac{e^{-|z|}(1+|z|)}{4},$$

oricare ar fi z.

31. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente care au aceeaşi funcţie de repartiţie, cu densitatea de repartiţie $\rho_\xi(x) = \rho_\eta(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{e^x + e^{-x}}$, $-\infty < x < +\infty$. Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei $\xi + \eta$.

Soluţie. Densitatea de repartiţie este

$$\rho(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \cdot q(z-u)\, du,$$

unde p şi q sînt densităţile respective ale variabilelor ξ şi η. În cazul nostru avem

$$\rho(z) = \frac{4}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^u + e^{-u}} \cdot \frac{1}{e^{z-u} + e^{-(z-u)}}\, du$$

sau

$$\rho(z) = \frac{4e^z}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2u}}{(1+e^{2u})(e^{2z} + e^{2u})}\, du.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $e^{2u} = x$, se obţine

$$\rho(z) = \frac{2e^z}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)(e^{2z} + x)},$$

de unde

$$\rho(z) = \frac{4e^z \cdot z}{\pi^2 (e^{2z} - 1)}, \quad -\infty < z < +\infty.$$

32. Să se arate că dacă variabilele ξ şi η sînt independente şi au densităţile de repartiţie

$$\rho_\xi(x) = \rho_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ e^{-x} & \text{pentru } x > 0, \end{cases}$$

atunci variabilele $\xi + \eta$ şi $\frac{\xi}{\eta}$ sînt de asemenea independente.

Soluţie. Funcţia de repartiţie a variabilei cu două dimensiuni $\left(\xi + \eta, \frac{\xi}{\eta}\right)$ este

$$P\left(\xi + \eta < u, \frac{\xi}{\eta} < v\right) = \iint\limits_{\substack{x+y<u \\ \frac{x}{y}<v}} \rho_\xi(u) \cdot \rho_\xi(v)\, du\, dv.$$

In cazul nostru avem

$$P\left(\xi+\eta<u, \frac{\xi}{\eta}<v\right)=\int_0^{\frac{uv}{1+v}} \int_{\frac{x}{v}}^{u-x} e^{-x}\cdot e^{-y}\,dxdy=$$

$$=\frac{v}{1+v}\left[1-(1+u)\,e^{-u}\right].$$

Cum

$$P(\xi+\eta<u)=1-e^{-u}(1+u) \quad \text{şi} \quad P\left(\frac{\xi}{\eta}<v\right)=\frac{v}{1+v},$$

rezultă

$$P\left(\xi+\eta<u, \frac{\xi}{\eta}<v\right)=P(\xi+\eta<u)\cdot P\left(\frac{\xi}{\eta}<v\right)$$

egalitate care probează independenţa variabilelor.

33. In intervalul $(0, 1)$ să alegem la întîmplare trei puncte ale căror abscise să le notăm cu ξ_1, ξ_2, ξ_3. Vom presupune că variabilele ξ_1, ξ_2, ξ_3 sînt independente şi că au distribuţie uniformă în $(0, 1)$. Fie $\eta_1=\min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ şi $\eta_3=\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, iar $\eta_2(x)$ ia valoarea din mijloc atunci cînd valorile $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\xi_3(x)$ sînt ordonate după mărime. Să se arate că variabilele $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ şi $\frac{\eta_2}{\eta_3}$ sînt independente.

Soluţie. Să notăm cu $\rho(x, y, z)$ densitatea de repartiţie a variabilei (η_1, η_2, η_3) care este pozitivă cînd $x<y<z$. In orice punct x, vectorul

$$(\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x))=(\xi_{i_1}(x), \xi_{i_2}(x), \xi_{i_3}(x)),$$

unde (i_1, i_2, i_3) este o permutare a indicilor $(1, 2, 3)$. Rezultă că $\rho(x, y, z)=6$, dacă $x<y<z$ şi nulă în celelalte cazuri.

Funcţia de repartiţie a variabilelor $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ şi $\frac{\eta_2}{\eta_3}$ este

$$P\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}<u, \frac{\eta_2}{\eta_3}<v\right)=\iiint\limits_{\substack{0<\frac{x}{y}<u<1\\ 0<\frac{y}{z}<v<1}} \rho(x, y, z)\,dxdydz=$$

$$=6\iiint\limits_{\substack{0<\frac{x}{y}<u<1\\ 0<\frac{y}{z}<v<1}} dxdydz=uv^2;$$

de aici se poate deduce că

$$P\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}<u, \frac{\eta_2}{\eta_3}<v\right)=P\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}<u\right)\cdot P\left(\frac{\eta_2}{\eta_3}<v\right)$$

adică, variabilele $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ şi $\frac{\eta_2}{\eta_3}$ sînt independente.

34. Dacă ξ şi η sînt două variabile aleatoare independente, ξ urmînd legea exponenţială cu densitatea $\lambda e^{-\lambda x}$ $(x>0)$ şi η, legea uniformă în intervalul $(0, 2\pi)$, să se calculeze funcţia de repartiţie a variabilei cu două dimensiuni (ξ_1, η_1), unde $\xi_1=\sqrt{\xi}\cdot\cos\eta$ şi $\xi_2=\sqrt{\xi}\cdot\sin\eta$.

Soluţie. Prin definiţie, avem

$$P(\xi_1<u, \eta_1<v)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\substack{\sqrt{x}\cdot\cos y<u\\ \sqrt{x}\cdot\sin y<v}} \lambda e^{-\lambda x}dxdy;$$

făcînd schimbarea de variabile

$$\alpha=\sqrt{x}\cos y,$$
$$\beta=\sqrt{x}\sin y,$$

rezultă $x=\alpha^2+\beta^2$, $y=\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$, iar determinantul funcţional

$$\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}=\begin{vmatrix} 2\alpha & -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ 2\beta & \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \end{vmatrix}=2.$$

Atunci

$$P(\xi_1<u, \eta_1<v)=\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{u}\int\limits_{-\infty}^{v} e^{-\lambda(\alpha^2+\beta^2)}d\alpha d\beta=$$

$$=\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{u}\int\limits_{-\infty}^{v} e^{-\lambda\alpha^2}\cdot e^{-\lambda\beta^2}d\alpha d\beta=$$

$$=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{u} e^{-\lambda\alpha^2}d\alpha\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{v} e^{-\lambda\beta^2}d\beta.$$

Notînd

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$$P(\xi_1<u, \eta_1<v)=\Phi(\sqrt{2\lambda}\cdot u)\cdot\Phi(\sqrt{2\lambda}\cdot v).$$

35. Variabilele ξ şi η fiind independente cu densităţi date, să se determine funcţia de repartiţie şi densitatea de repartiţie a produsului $\xi\eta$.

Soluţie. Funcţia de repartiţie a produsului $\xi\eta$ este

$$F(z)=P(\xi\eta<z)=\iint\limits_{xy<z}\rho_\xi(x)\cdot\rho_\eta(y)\,dxdy.$$

Făcînd schimbarea de variabile $x=x$, $y=\frac{t}{x}$, avem

$$F(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{1}{|x|}\rho_\xi(x)\rho_\eta\left(\frac{t}{x}\right)dtdx,$$

iar densitatea de repartiţie este

$$\rho_{\xi\eta}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}\rho_\xi(x)\cdot\rho_\eta\left(\frac{z}{x}\right)dx,$$

dacă integrala are sens.

Dacă variabilele ξ, η iau valori în intervalul $(0, a)$ atunci

$$\rho_{\xi\eta}(z)=\int\limits_{0}^{a}\frac{1}{x}\rho_\xi(x)\rho_\eta\left(\frac{z}{x}\right)dx.$$

36. Se dă o ţintă sub forma unui punct într-un plan. Pentru un trăgător care trage asupra ţintei notînd cu ξ punctul făcut de glonţ, ξ este o variabilă aleatoare cu două dimensiuni, care are densitatea de repartiţie normală

$$\rho_\xi=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2\sigma^2}},$$

unde a şi b sînt coordonatele ţintei. Să se calculeze probabilitatea ca toate gloanţele să fie trase în cercul de rază R şi centrul (a, b).

Dacă se interpretează raza R ca variabilă aleatoare, să se calculeze densitatea ei de repartiţie.

Soluţie. Probabilitatea ca gloanţele să lovească în cercul de rază R este

$$F(R)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2\sigma^2}}dxdy.$$

Trecînd la coordonate polare,

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2, \quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y-b}{x-a},$$

avem

$$F(R)=\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r\,dr\,d\theta=1-e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}.$$

Densitatea de repartiție a razei este

$$\rho(R)=\frac{R}{\sigma^2}e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}.$$

37. Variabila η_n este suma a n variabile independente, uniforme în $(0, 1)$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Dacă ρ_n este densitatea de repartiție a lui η_n, să se arate că:

a) $\rho_{n+1}(y)=\int_{y-1}^{y}\rho_n(t)\,dt$

b) $\rho_n(y)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_n^r (y-r)^{n-1}$,

dacă $m<y<m+1$ $(m=0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Soluție. a) Știm că pentru ξ și η variabile independente

$$\rho_{\xi+\eta}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\xi(t)\cdot\rho_\eta(y-t)\,dt.$$

Vom descompune pe $\eta_{n+1}=\eta_n+\xi_{n+1}$, unde η_n și ξ_{n+1} sînt independente și ξ_{n+1} este uniformă în $(0, 1)$. Atunci, cu notațiile exercițiului, vom avea

$$\rho_{n+1}(y)=\int_0^1\rho_{\xi_{n+1}}(u)\cdot\rho_n(y-u)\,du=\int_0^1\rho_n(y-u)\,du.$$

Făcînd schimbarea de variabilă

$$y-u=t,$$

deducem

$$\rho_{n+1}(y)=\int_{y-1}^{y}\rho_n(t)\,dt.$$

b) Formula dată pentru $\rho_n(y)$ o vom demonstra prin inducție. Ea este adevărată pentru $n=1$. Pentru $k<z<k+1$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, avem $z-1<k<z$.

Integrala

$$\rho_{n+1}(z)=\int_{z-1}^{z}\rho_n(y)\,dy$$

o descompunem pentru $z-1<y<z$ și pentru $k<y<z<k+1$:

$$\rho_{n+1}(z)=\int_{z-1}^{k}\rho_n(y)\,dy+\int_{k}^{z}\rho_n(y)\,dy.$$

Presupunînd formula (b) adevărată, obținem:

$$\rho_{n+1}(z)=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r C_n^r(z-r)^n-\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_n^r(z-1-r)^n.$$

În suma a doua din membrul al doilea facem schimbarea de indice

$$1+r=j$$

și avem

$$\rho_{n+1}(z)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_n^j(z-j)^n-\frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}C_n^{j-1}(z-j)^n;$$

ținînd seamă de egalitatea $C_{n+1}^j=C_n^j+C_n^{j-1}$ obținem formula cerută pentru $n+1$

$$\rho_{n+1}(z)=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^k C_{n+1}^k(z-r)^n,\quad k<z<k+1,\quad k=0, 1, 2, \ldots, n.$$

38. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, n variabile aleatoare independente cu densitatea de repartiție normală (a, σ).

Să se determine funcția de repartiție a variabilei

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)^2.$$

Această repartiție se numește *„repartiția χ^2"*.

Soluție. Vom deduce funcția de repartiție a variabilei χ^2, din funcția de repartiție a variabilei

$$\zeta=\frac{\chi}{\sqrt{n}}.$$

Vom nota $\Phi(y)$ funcția de repartiție a variabilei ζ; atunci, pentru $y<0$, $\Phi(y)=0$; pentru $y>0$, $\Phi(y)$ reprezintă probabilitatea ca vectorul $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ să aparțină sferei $\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\sigma^2y^2n$ adică

$$\Phi(y)=\underset{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2<n\sigma^2y^2}{\int\int\ldots\int}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot e^{-\frac{\sum(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx_1dx_2\ldots dx_n$$

sau încă

$$\Phi(y)=\underset{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\leqslant ny^2}{\int\int\ldots\int}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\,dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Pentru calculul acestei integrale vom trece la sistemul de coordonate polare:

$$\begin{aligned}
x_1&=\rho\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-1}\\
x_2&=\rho\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1}&=\rho\cos\theta_1\sin\theta_2\\
x_n&=\rho\sin\theta_1
\end{aligned}$$

cu $-\frac{\pi}{2}<\theta_i<\frac{\pi}{2}$ și $0\leqslant\rho\leqslant y\sqrt{n}$.

Cu această schimbare de coordonate avem

$$\Phi(y)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ldots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{y\sqrt{n}}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\times$$

$$\times e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{n-1}D(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\,d\rho d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}=C_n\int_{0}^{y\sqrt{n}}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{n-1}d\rho,$$

unde am pus

$$C_n=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ldots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}D(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})\,d\theta_1d\theta_2\ldots d\theta_{n-1}.$$

Pentru determinarea constantei C_n, vom observa că

$$\Phi(+\infty)=1=C_n\int_0^{\infty}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{n-1}d\rho=C_n\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\frac{n}{2}-1}\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\,dt;$$

cum

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{a-1}dt=\Gamma(a),\quad \Phi(+\infty)=1=2^{\frac{n}{2}-1}C_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

de unde deducem

$$C_n=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

şi

$$\Phi(y)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\int_0^{y\sqrt{n}}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{n-1}d\rho,$$

ceea ce reprezintă funcţia de repartiţie a variabilei ζ^2. Derivînd pe $\Phi(y)$ şi notînd cu $\varphi(y)$ densitatea obţinută, găsim

$$\varphi(y)=\frac{\sqrt{n}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot(y\sqrt{n})^{n-1}e^{-\frac{ny^2}{2}}$$

sau încă

$$\varphi(y)=\frac{\sqrt{2n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(\frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}e^{-\frac{ny^2}{2}}\qquad(1)$$

pentru $y\geqslant 0$.

Ştiind că $\chi^2=n\cdot\zeta^2$, obţinem densitatea de repartiţie a variabilei χ^2,

$$\varphi_n(x)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\qquad(2)$$

Observaţie. Dacă în (1) facem $n=3$, obţinem densitatea

$$\varphi_3(y)=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}y^2e^{-\frac{3y^2}{2}}$$

care determină legea lui Maxwell. Din (2) se deduc uşor următoarele repartiţii, des folosite în aplicaţii:

Variabila	Densitatea de repartiție corespunzătoare
$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)^2$	$\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$
$\frac{1}{n}\chi^2=\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)^2$	$\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nx}{2}}$
$\chi=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)^2}$	$\frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}$
$\zeta=\frac{\chi}{\sqrt{n}}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}e^{-\frac{nx^2}{2}}$

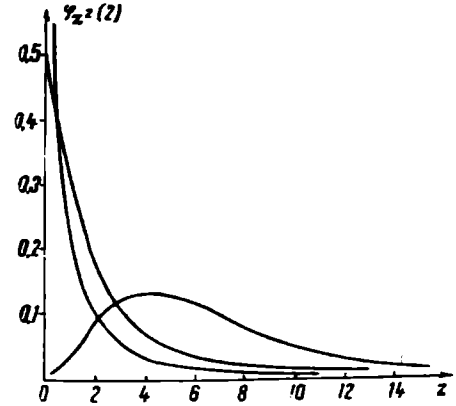

Fig. 13

Graficul densităților de repartiție a variabilei χ^2, pentru $n=1$, 2, 6 este dat în fig. 13 (reprodus după Dunin-Barkovski [6]).

39. Să se determine distribuţiile a căror densitate de repartiţie, y, verifică ecuaţia

$$\frac{y'}{y} = \frac{a_1 + x}{a_2 + a_3 x + a_4 x^2}$$

(a_1, a_2, a_3, a_4 sînt coeficienţi constanţi). Distribuţiile care verifică această ecuaţie se cunosc sub denumirea de *distribuţii Pearson*.

Soluţie. Pentru determinarea celor patru parametri este necesar să cunoaştem primele patru momente ale repartiţiei.

1) Presupunem că trinomul de la numitor are rădăcini reale şi distincte $\alpha_1 < \alpha_2$. Atunci membrul al doilea al ecuaţiei se descompune în elemente simple de forma

$$\frac{y'}{y} = \frac{A}{x-\alpha_1} + \frac{B}{x-\alpha_2}, \quad A+B \neq 0,$$

şi prin urmare pentru $\alpha_1 < x < \alpha_2$,

$$y = k(x-\alpha_1)^A \cdot (x-\alpha_2)^B.$$

Constanta k se determină prin condiţia

$$\int_A^B y\,dx = 1.$$

Particularizînd trinomul de la numitor, obţinem diferite repartiţii

a) Dacă $\alpha_1 = -n$, $\alpha_2 = n$, $A = B = \frac{1}{2} n^2$, $k = hn^{-n^2}$, atunci

$$y = h\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}.$$

Cînd $n \to \infty$, obţinem legea normală

$$y = he^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b) Pentru $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $A = p_1 - 1$, $B = p_2 - 1$ ($p_1 > 0$, $p_2 > 0$) şi $k = \frac{\Gamma(p_1) \cdot \Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)}$, obţinem

$$y = kx^A \cdot (1-x)^B.$$

c) Dacă punem $B=\alpha_2\cdot\alpha$, $k=h\,e^{\alpha\alpha_1}\cdot\alpha_2^{-\alpha\alpha_2}$, obținem

$$y=h\,(x-\alpha_1)^A\cdot\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2\alpha}e^{\alpha_1\alpha}.$$

Făcînd $\alpha_2\to\infty$, obținem $y=h\,(x-\alpha_1)^A\cdot e^{-\alpha\,(x-\alpha_1)}$. Din această densitate se poate deduce repartiția χ^2.

d) Dacă punem $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=0$ și pe k îl alegem convenabil, atunci

$$y=kx^B\cdot(1+x)^A.$$

2) Să presupunem că trinomul de la numitor are rădăcini imaginare.

Atunci ecuația are soluții de forma

$$y=\frac{k}{(a_2+a_3x+a_4x^2)^m};\quad \left(m>\frac{1}{2}\right);\quad (-\infty<x<\infty).$$

Ca un caz particular al acestei repartiții se obține *repartiția Student*:

$$y=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

40. Fie t variabila aleatoare dată de

$$t=\frac{Z\sqrt{k}}{V},$$

unde Z urmează legea normală cu parametrii (0, 1). Variabila V este independentă de Z, iar V^2 urmează legea χ^2 cu k grade de libertate.

In aceste condiții să se arate că densitatea de repartiție a variabilei t este

$$\rho_k(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}(-\infty<t<\infty).$$

Această distribuție se numește *distribuția Student.*

Soluție. Funcția de repartiție a legii Student este

$$P(t<t_1)=\int_{-\infty}^{t_1}\rho_k(t)\,dt.$$

Știind însă că densitatea de repartiție a variabilei Z este

$$\rho_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},$$

densitatea de repartiție $\rho_2(u)$ a variabilei $U=\sqrt{\frac{V^2}{k}}$ se va scrie, conform transformărilor obținute în cazul legii $\frac{\chi}{\sqrt{k}}$:

$$\rho_2(u)=\frac{2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}u^{k-1}e^{-\frac{ku^2}{2}}.$$

Deoarece variabilele Z și $\sqrt{\frac{V^2}{k}}$ sînt independente, notînd cu $\rho(z, u)$ densitatea de repartiție, avem

$$\rho(z, u)=\rho_1(z)\,\rho_2(u)=C_k e^{-\frac{z^2}{2}-\frac{ku^2}{2}}u^{k-1},$$
$$-\infty<z<\infty,$$
$$-\infty<u<\infty,$$

iar

$$C_k=\frac{2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{2\pi}}.$$

Pe de altă parte

$$P(t<t_1)=P\left(\frac{Z}{U}<t_1\right)=P(Z<t_1U).$$

Aceasta este probabilitatea ca un punct aleator N de coordonate Z și U distribuit în plan cu densitatea $\rho(Z, U)$ să cadă în domeniul $G(t_1)$ definit prin $z<t_1u$. Deci

$$P(t<t_1)=\iint\limits_{G(t_1)}\rho(z, u)\,dz\,du=C_k\int\limits_0^{\infty}du\int\limits_{-\infty}^{t_1u}\rho(z, u)\,dz=$$
$$=C_k\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{ku^2}{2}}u^{k-1}du\int\limits_{-\infty}^{t_1u}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Pentru a găsi densitatea de repartiție, să derivăm egalitatea de mai înainte în raport cu t_1. Avem

$$p_k(t_1)=C_k\int_0^{\infty}e^{-\frac{ku^2}{2}}u^{k-1}\frac{d}{dt_1}\int_{-\infty}^{t_1}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\,du=$$

$$=C_k\int_0^{\infty}e^{-\frac{ku^2}{2}}u^{k-1}e^{-\frac{t_1^2u^2}{2}}u\,du=C_k\int_0^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}(k+t_1^2)}u^{k-1}u\,du.$$

Făcînd substituția

$$\frac{u^2}{2}(k+t_1^2)=\xi;\quad u=\left(\frac{2\xi}{k+t_1^2}\right)^{\frac{1}{2}};\quad u\,du=\frac{d\xi}{k+t_1^2},$$

obținem

$$p_k(t_1)=C_k\int_0^{\infty}e^{-\xi}\left(\frac{2\xi}{k+t_1^2}\right)^{\frac{k-1}{2}}\frac{d\xi}{k+t_1^2}=\frac{2^{\frac{k-1}{2}}C_k}{(k+t_1^2)^{\frac{k+1}{2}}}\cdot\int_0^{\infty}e^{-\xi}\xi^{\frac{k+1}{2}}d\xi.$$

Însă

$$\int_0^{\infty}e^{-\xi}\xi^{\frac{k-1}{2}}d\xi=\int_0^{\infty}e^{-\xi}\xi^{\frac{k+1}{2}-1}d\xi=\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

și deci

$$p_k(t_1)=\frac{2^{\frac{k-1}{2}}C_k}{(k+t_1^2)^{\frac{k+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

Făcînd calculele, obținem

$$p_k(t_1)=\frac{2^{\frac{k+1}{2}}\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{2\pi}\,(k+t_1^2)^{\frac{k+1}{2}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t_1^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

41. Fie U și V două variabile aleatoare independente, care urmează fiecare legea de probabilitate χ^2, respectiv cu k_1 și k_2 grade de libertate și variabila aleatoare F, dată de raportul

$$F=\frac{\frac{U}{k_1}}{\frac{V}{k_2}}=\frac{k_2U}{k_1V}.$$

Să se determine densitatea de probabilitate a acestei variabile şi să se arate că ea este

$$\rho_F(f)=\frac{C_0 f^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2+k_1 f)^{\frac{k_1+k_2}{2}}},$$

unde

$$C_0=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{\frac{k_1}{2}} k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}.$$

Repartiţia a cărei densitate este $\rho_F(f)$ se numeşte repartiţia F cu k_1+k_2 grade de libertate.

Soluţie. Să determinăm mai întîi distribuţia variabilei $W=\frac{U}{V}$. Fie $w>0$; atunci

$$P(W<w)=P\left(\frac{U}{V}<w\right)=\iint\limits_G \rho(u)\,\rho(v)\,du\,dv,$$

unde $\rho(u)$, $\rho(v)$ sînt densităţile de repartiţie ale variabilelor U şi V, iar G domeniul din plan definit prin inegalităţile:

$$u\geqslant 0,\quad v>0,\quad \frac{u}{v}<w.$$

Deci

$$P(W<w)=\int_0^{\infty}\rho(v)\,dv\int_0^{vw}\rho(u)\,du=$$

$$=C_1C_2\int_0^{\infty}e^{-\frac{v}{2}}v^{\frac{k_1-2}{2}}dv\int_0^{vw}u^{\frac{k_1-2}{2}}e^{-\frac{u}{2}}du,$$

unde $C_i=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k_i}{2}\right)2^{\frac{k_i}{2}}}$ $(i=1,2)$.

Derivînd egalitatea de mai sus în raport cu w, avem

$$\rho(w)=C_1C_2\int_0^{\infty}e^{-\frac{v}{2}}u^{\frac{k_1-2}{2}}(vw)^{\frac{k_1-2}{2}}e^{-\frac{vw}{2}}v\,dv=$$

$$=C_1C_2w^{\frac{k_1-2}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{v}{2}(1+w)}v^{\frac{k_1+k_2-2}{2}}dv.$$

Notînd $y=\frac{v}{2}(1+w)$, obținem

$$\rho(w)=C_1C_2w^{\frac{k_1-2}{2}}\int_0^{\infty}\left(\frac{2y}{1+w}\right)^{\frac{k_1+k_2-2}{2}}e^{-y}\frac{2}{1+w}\,dy=$$

$$=\frac{C_1C_2w^{\frac{k_1-2}{2}}2^{\frac{k_1+k_2}{2}}}{(1+w)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}\int_0^{\infty}y^{\frac{k_1+k_2-2}{2}}e^{-y}dy=\frac{C_1C_2w^{\frac{k_1-2}{2}}}{(1+w)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)$$

sau

$$\rho(w)=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\cdot\frac{W^{\frac{k_1-2}{2}}}{(1+w)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}.$$

Insă

$$F=\frac{k_2u}{k_1v}=\frac{k_2}{k_1}W.$$

Notînd

$$w=\frac{k_1}{k_2}f,\quad dw=\frac{k_1}{k_2}df,$$

obținem

$$\rho(f)=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{k_1}{k_2}f\right)^{\frac{k_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{k_1}{k_2}f\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}\cdot\frac{k_1}{k_2}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\cdot\frac{f^{\frac{k_1-2}{2}}\cdot k_2^{\frac{k_1+k_2}{2}}}{(k_2+k_1f)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}\cdot\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1-2}{2}}\cdot\frac{k_1}{k_2}=\frac{C_0f^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2+k_1f)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}.$$

Aceasta se mai poate scrie

$$\rho(f)=\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}}\frac{\left(\Gamma\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\cdot f^{\frac{k_1-2}{2}}\left(1+\frac{k_1}{k_2}f\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}.$$

42. Să considerăm o urnă care conține A bile albe și B bile negre ($A+B=N$). Se fac extracții succesive. După fiecare extracție bila scoasă nu se mai pune înapoi în urnă.

Să se arate că probabilitatea ca să obținem din n extracții succesive, fără a pune bila extrasă înapoi în urnă, o abatere $A\sqrt{n}\leqslant l\leqslant B\sqrt{n}$, A și B fiind două constante, este asimptotic egală cu

$$P_n(l)\approx\frac{N}{\sqrt{2\pi n(N-n)pq}}e^{-\frac{N}{2n(N-n)pq}\cdot l^2}.$$

Soluție. Probabilitatea pentru α bile albe și β bile negre $(\alpha+\beta=n)$ în n extracții succesive este dată de

$$P_n(\alpha)=\frac{C_A^\alpha C_B^{n-\alpha}}{C_{A+B}^{\alpha+\beta}}=\frac{C_{Np}^\alpha C_{Nq}^\beta}{C_N^n}.$$

Să introducem abaterea

$$l=\alpha-np$$

și să înlocuim pe α cu $np+l$. Atunci $P_n(\alpha)$ se poate scrie sub forma

$$P_n(l)=\frac{(N_p)!}{(np+l)!\,(Np-np+l)!}\cdot\frac{(N_q)!}{(nq-l)!\,(Np-nq+l)!}\cdot\frac{n!(N-n)!}{N!}.$$

Aplicînd formula lui Moivre-Stirling

$$n!=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n(1+\theta(n))},$$

unde $\theta(n)$ tinde către zero odată cu n, obținem:

$$P_n(l)=\frac{(Np)^{Np+\frac{1}{2}}\cdot(Nq)^{Nq+\frac{1}{2}}}{(np+l)^{np+l+\frac{1}{2}}[(N-n)p-l]^{(N-n)p-l+\frac{1}{2}}(nq-l)^{nq-l+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\cdot(N-n)^{N-n+\frac{1}{2}}}{[(N-n)q+l]^{(N-n)q+l+\frac{1}{2}}N^{N+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{N}\cdot1\cdot(np)^{-np-l-\frac{1}{2}}(N-np)^{-(N-n)p-l-\frac{1}{2}}(nq)^{-nq+l-\frac{1}{2}}}{N\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{l}{np}\right)^{np+l+\frac{1}{2}}\left[1-\frac{l}{(N-n)p}\right]^{(N-n)p-l+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\frac{[(N-n)q]^{-(N-n)q-l-\frac{1}{2}}p^{Np+\frac{1}{2}}q^{Nq+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{l}{nq}\right)^{nq-l+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times \frac{(N-n)^{N-n+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{l}{(N-n)q}\right)^{(N-n)q+l+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi(N-n)pq}} \cdot \frac{1}{T},$$

unde

$$T = \left(1+\frac{l}{np}\right)^{np+l+\frac{1}{2}} \left[1-\frac{1}{(N-n)p}\right]^{(N-n)p-l+\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(1-\frac{l}{nq}\right)^{nq-l+\frac{1}{2}} \left[1+\frac{l}{(N-n)q}\right]^{(N-n)q+l+\frac{1}{2}}.$$

Pentru evaluarea asimptotică a lui T, presupunem că este îndeplinită condiția

$$A\sqrt{n} \leqslant l \leqslant B\sqrt{n},$$

A și B fiind două constante. Atunci au loc inegalitățile:

$$\frac{|l|}{np}<1, \quad \frac{|l|}{(N-n)p}<1; \quad \frac{|l|}{nq}<1, \quad \frac{|l|}{(N-n)q}<1,$$

pentru valori mari ale lui n.

Aplicînd lui T logaritmul, obținem

$$\ln T = \left(n+p+l+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{l}{np}\right) +$$

$$+\left[(N-n)p-l+\frac{1}{2}\right]\cdot\ln\left[1-\frac{l}{(N-n)p}\right] + \left(nq-l+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{l}{nq}\right) +$$

$$+\left[(N-n)q+l+\frac{1}{2}\right]\ln\left[1+\frac{l}{(N-n)q}\right].$$

Dezvoltînd în serie funcțiile logaritmice din membrul al doilea vom obține

$$\left(np+l+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{l}{nq}\right) = \left(np+l+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{l}{np}-\frac{l^2}{2n^2p^2}+\dots\right) =$$

$$= l+\frac{l^2}{np}+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\left[(N-n)p-l+\frac{1}{2}\right]\ln\left[1-\frac{l}{(N-n)p}\right] =$$

$$= \left[(N-n)p-l+\frac{1}{2}\right]\left[-\frac{l}{(N-n)p}-\frac{l^2}{2(N-n)^2p^2}\dots\right] =$$

$$= -l+\frac{l^2}{2(N-n)p}+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

şi

$$\left(nq-l+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{l}{nq}\right)=\left(nq-l+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{l}{nq}-\frac{l^2}{2nq^2}\cdots\right)=$$

$$=-l+\frac{l^2}{2nq}+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\left[(N-n)q+l+\frac{1}{2}\right]\cdot\ln\left(1+\frac{l}{(N-n)q}\right)=$$

$$=\left[(N-n)q+l+\frac{1}{2}\right]\cdot\left[\frac{l}{(N-n)q}-\frac{l^2}{2(N-n)^2q^2}+\cdots\right]=$$

$$=l+\frac{l^2}{2(N-n)q}+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Adunînd aceste egalităţi, obţinem

$$\ln T=\frac{N}{2n(N-n)pq}l^2+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

de unde

$$T=e^{\frac{N}{2n(N-n)pq}l^2+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

şi deci

$$P_n(l)\approx\frac{N}{\sqrt{2\pi n(N-n)pq}}e^{-\frac{N}{2n(N-n)pq}l^2}.$$

43. Se consideră o variabilă aleatoare X care ia valorile $a_1, a_2, \ldots, a_s$ cu probabilităţile respective $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $\left(\sum_{i=1}^{s}p_i=1,\ 0\leqslant p_i\leqslant 1\right)$. Supunem această variabilă la n probe independente şi notăm cu λ_l numărul care arată de cîte ori variabila a trecut prin starea a_l $\left(\sum_l\lambda_l=n\right)$.

Fie $P_n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s)$ probabilitatea ca variabila aleatoare X în aceste n probe să treacă respectiv de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ori prin stările $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Să introducem variabila redusă

$$\xi_l=\frac{\lambda_l-np_l}{\sqrt{np_lq_l}}.$$

Să se arate că oricare ar fi $a < \xi_l < b$, unde a și b sînt două constante, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{s-1}{2}} P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)}{\frac{e^{-\frac{1}{2}\sum a_l - \xi_l^2}}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_s}}} = 1.$$

Soluție. Pentru a demonstra convergența de mai sus, ne vom folosi de formula lui Stirling:

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} e^{\theta_n}, \quad |\theta_n| \leqslant \frac{1}{12n}.$$

Știm că

$$P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_s!} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_s^{\lambda_s}.$$

Aplicînd formula lui Stirling obținem

$$P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} e^{\theta_n - \sum_{i=1}^{s} \theta_{\lambda_i}}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{\lambda_i + \frac{1}{2}} e^{-\lambda_i}} \prod_{i=1}^{s} p_i^{\lambda_i} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{n}{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_s}}\, e^{\theta} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{np_i}{\lambda_i}\right)^{\lambda_i},$$

unde am notat

$$\theta = \theta_n - \sum_{i=1}^{s} \theta_{\lambda_i}.$$

Sau

$$P_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s) = \frac{e^{\theta}}{(2\pi n)^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \xi_i \sqrt{\frac{q_i}{np_i}}\right)^{-\left(np_i + t_i \sqrt{np_i q_i} + \frac{1}{2}\right)}$$

Deoarece

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s}}=\sqrt{\frac{n}{np_1p_2\cdots p_s}}\cdot\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{np_i}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{np_i}{\lambda_i}\right)^{\lambda_i}=\left(\frac{\lambda_i}{np_i}\right)^{-\lambda_i}.$$

Din definiţia variabilei reduse rezultă că

$$\lambda_i=np_i+\xi_i\sqrt{np_iq_i}\quad\text{şi}\quad\frac{\lambda_i}{np_i}=1+\xi_i\sqrt{\frac{q_i}{np_i}}.$$

Pentru evaluarea asimptotică a produsului

$$\prod_{i=1}^{s}\left(1+\xi_i\sqrt{\frac{q_i}{np_i}}\right)^{-\left(np_i+\xi_i\sqrt{np_iq_i}+\frac{1}{2}\right)},$$

să aplicăm logaritmii

$$\ln\prod_{i=1}^{s}\left(1+\xi_i\sqrt{\frac{q_i}{np_i}}\right)^{-\left(np_i+\xi_i\sqrt{np_iq_i}+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left(np_i+\xi_i\sqrt{np_iq_i}+\frac{1}{2}\right)\left[\xi_i\sqrt{\frac{q_i}{np_i}}-\frac{1}{2}\,\frac{q_i\xi_i^2}{np_i}+\theta\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}q_i\xi_i^2+\theta\left(n^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Deoarece

$$\sum_{i=1}^{s}\xi_i\sqrt{np_iq_i}=\sum_{i=1}^{s}(\lambda_i-np_i)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i-n\sum_{i=1}^{s}P_i=0\quad\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=n\right),$$

în acelaşi timp ţinînd seama că

$$|\theta|\leqslant|\theta_n|+\left|\sum_{i=1}^{s}\theta_{\lambda_i}\right|\leqslant\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{12\lambda_i}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\lambda_i}\right)=$$

$$=\frac{1}{12n}\left(1+\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{p_i}\cdot\frac{1}{1+\xi_i\sqrt{\frac{q_i}{np_i}}}\right),$$

convergenţa este demonstrată.

44. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n variabile aleatoare independente, avînd aceeaşi funcţie de repartiţie F (respectiv aceeaşi densitate de repartiţie ρ).

Să se determine funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare

$$\zeta = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Soluţie. Să notăm cu $U = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ şi cu $V = \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; atunci

$$\zeta = U - V.$$

Variabilele U şi V nu sînt independente. Variabilele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ fiind independente şi avînd aceeaşi funcţie de repartiţie au loc relaţiile:

$$P(U<x) = P(\xi_1<x,\ \xi_2<x,\ \ldots,\ \xi_n<x) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i<x) = [F(x)]^n$$

şi

$$P(V\geqslant x) = P(\xi_1\geqslant x,\ \xi_2\geqslant x,\ \ldots,\ \xi_n\geqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i\geqslant x) = [1-F(x)]^n.$$

Notăm cu $F(x, y)$ funcţia de repartiţie cu două dimensiuni a variabilei aleatoare (U, V),

$$F(x, y) = P(U<x,\ V<y).$$

Evenimentele $\{V<y\}$ şi $\{V\geqslant y\}$ fiind complementare, rezultă că

$$P(U<x) = P(U<x,\ V<y) + P(U<x,\ V\geqslant y),$$

de unde deducem

$$F(x, y) = [F(x)]^n - P(U<x,\ V\geqslant y).$$

Să evaluăm $P(U<x,\ V\geqslant y)$; vom examina cazurile $x\leqslant y$ şi $y<x$.

Dacă $x\leqslant y$, atunci evenimentul

$$\{\max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)<x\leqslant y\leqslant \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\}$$

este imposibil, deci în acest caz

$$P(U<x,\ V\geqslant y) = 0.$$

Dacă $y<x$, atunci pentru ca evenimentul

$$\{y\leqslant \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\leqslant \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)<x\}$$

să se realizeze, trebuie ca evenimentele

$$\{y \leqslant \xi_i < x\}; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

să se realizeze; ori cum

$$P(y \leqslant \xi_i < x) = F(x) - F(y),$$

rezultă, în acest caz,

$$P(U < x, \ V \geqslant y) = [F(x) - F(y)]^n.$$

Atunci funcția de repartiție, cu două dimensiuni, a variabilei (U, V) este

$$F(x, y) = \begin{cases} [F(x)]^n, & \text{dacă } x \leqslant y \\ [F(x)]^n - [F(x) - F(y)]^n, & \text{dacă } x > y. \end{cases}$$

Să presupunem că variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ au aceeași densitate de repartiție ρ și să notăm cu $w(x, y)$ densitatea variabilei (U, V). Cum $w(x, y)$ este derivata mixtă a funcției $F(x, y)$, obținem

$$W(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leqslant y \\ n(n-1)[F(x) - F(y)]^{n-2} \rho(x) \rho(y), & \text{dacă } x > y. \end{cases}$$

Funcția de repartiție a variabilei ζ, $F_\zeta(s)$ este dată de probabilitatea

$$P(U - V < s).$$

Să notăm cu D partea din plan în care $U - V < s$; atunci

$$P(U - V < s) = \iint_D W(x, y)\, dx dy.$$

Se vede că pentru $s \leqslant 0$, $P(U - V < s) = 0$; pentru $s > 0$ putem scrie

$$P(U - V < s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{x-s}^{+\infty} W(x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{x} W(x, x - y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{s} dy \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, x - y)\, dx.$$

Derivînd în raport cu parametrul s, găsim densitatea de repartiție a variabilei aleatoare ζ,

$$p_\zeta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, x - s)\, dx.$$

Cum $w(x, y)=0$, dacă $x \leqslant y$, rezultă că $w(x, x-s)=0$, dacă $x \leqslant x-s$, adică dacă $s \leqslant 0$.

Densitatea de repartiție a variabilei ζ este

$$\rho_\zeta(s)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } s \leqslant 0 \\ n(n-1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}[F(x)-F(x-s)]^{n-2}\rho(x)\,\rho(x-s)\,dx, & \text{dacă } s>0. \end{cases}$$

45. Fie date variabilele aleatoare continue $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ și variabila aleatoare $\eta=g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Să presupunem că densitatea de repartiție n-dimensională a variabilelor $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ este constantă pe suprafața din spațiul cu n dimensiuni, dată de ecuația $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=y$.

Vom pune atunci

$$\rho_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f_g(y)$$

pentru toate punctele $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de pe suprafața de mai sus.

Dacă g este funcție continuă, să se determine densitatea de repartiție a variabilei aleatoare η.

Soluție. În condițiile de mai sus densitatea de repartiție a variabilei η este dată de

$$\rho_\eta(y)=f_g(y)\cdot\frac{dV_g(y)}{dy},$$

unde

$$V_g(y)=\iint\ldots\int\limits_{\{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leq y\}} dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

adică $V_g(y)$ este volumul interior suprafeței din spațiul cu n dimensiuni, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=y$. Fie

$$B(y, h)=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\quad y<g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant y+h\}$$

mulțimea din spațiul cu n dimensiuni; după teorema mediei pentru integrale, dacă F_η este funcția de repartiție a variabilei η,

$$F_\eta(y+h)-F_\eta(y)=$$

$$=\iint\ldots\int\limits_{B(y, h)}\rho_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\rho_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1', x_2', \ldots, x_n')\,[V_g(y+h)-V_g(y)],$$

unde $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ este un punct din mulțimea $B(y, h)$. Cum funcția $f_g(y)$ este continuă, $\lim_{h\to 0} \rho_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}(x_1', x_2', \ldots, x_n') = f_g(y)$ și

$$\lim_{h\to 0} \frac{V_g(y+h)-V_g(y)}{h} = \frac{dV_g(y)}{dy};$$

rezultă atunci că

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_\eta(y+h)-F_\eta(y)}{h} = f_g(y)\cdot \frac{dV_g(y)}{dy}.$$

46. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n variabile aleatoare independente normale $(0, 1)$ și $\eta = \sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}$. Să se arate că densitatea variabilei η este

$$\rho_\eta(y) = \frac{y^{n-1}e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\int_0^\infty y^{n-1}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy}, \text{ dacă } y\geqslant 0 \text{ și } 0 \text{ dacă } y<0.$$

Soluție. Se vede că η are repartiția χ cu parametrii n și $\sqrt{n}$. Să notăm

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$$

și

$$f_g(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}y^2};$$

atunci, după exercițiul precedent, $V_g(y)$ este volumul unei sfere n dimensionale de rază y și evident, $V_g(y)=0$, dacă $y<0$. Pentru $y\geqslant 0$,

$$V_g(y) = \iint\ldots\int_{\{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leq 1\}} y^n\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

prin urmare

$$V_g(y) = y^n\cdot K \quad \text{și} \quad \frac{dV_g(y)}{dy} = ny^{n-1}\cdot K.$$

Densitatea de repartiție a variabilei η este, atunci,

$$\rho_\eta(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\cdot kny^{n-1} = K_0\cdot y^{n-1}e^{-\frac{1}{2}y^2},$$

dacă $y\geqslant 0$ și $\rho_\eta(y)=0$, dacă $y<0$.

Constanta K_0 o determinăm din condiția $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\eta(y)\,dy = 1$.

Rezultă că

$$K_0 = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{\int_0^\infty y^{n-1}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy}.$$

47. Să se arate că energia unui gaz ideal are repartiția ψ^2.

Soluție. Să considerăm un gaz ideal format cu N particule, respectiv cu masele $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Fie de asemenea $(v_x^{(i)}, v_y^{(i)}, v_z^{(i)})$ componentele vectorului viteză la un moment dat a particulei a i-a.

Energia totală a gazului este dată de energia cinetică a gazului

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\{(v_x^{(i)})^2 + (v_y^{(i)})^2 + (v_z^{(i)})^2\}.$$

Presupunem că densitatea de probabilitate a celor $3N$ viteze $\{v_x^{(1)}, v_y^{(1)}, v_z^{(1)}, \ldots, v_x^{(N)}, v_y^{(N)}, v_z^{(N)}\}$ este proporțională cu $e^{-E/kT}$, unde k este constanta lui Boltzmann și T temperatura absolută a gazului. În mecanica statistică se știe că starea gazului urmează legea lui Gibbs. Energia gazului este o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate dedusă din exercițiul 45:

$$\rho_E(x) = k_1 \cdot e^{-\frac{x}{kT}} \frac{dV_E(x)}{dx}$$

K_1 este o constantă și $V_E(x)$ este volumul elipsoidului din spațiul cu $3N$ dimensiuni, format cu componentele vitezelor a căror energie $E \leqslant x$ și

$$V_E(x) = K_2 \cdot x^{\frac{3N}{2}},$$

de unde

$$\frac{dV_E(x)}{dx} = \frac{3}{2}K_2 x^{\frac{3N}{2}-1}.$$

Rezultă că

$$\rho_E(x) = \frac{x^{\frac{3N}{2}-1}e^{-\frac{x}{kT}}}{\int_0^\infty x^{\frac{3N}{2}-1}e^{-\frac{x}{kT}}dx},$$

deci E are distribuție de tipul ψ^2 cu parametrii $n = 3N$ și $\frac{kT}{2}$.

MOMENTE. DISPERSII. INVARIANȚI. CORELAȚIE. FUNCȚII GENERATOARE

Considerînd cîmpul de probabilități (Ω, K, P) și variabila aleatoare ξ, pentru orice p întreg pozitiv, funcția ξ^p este de asemenea o variabilă aleatoare. Dacă variabila aleatoare pentru evenimentul $\omega \in \Omega$ ia valoarea x, atunci variabila ξ^p pentru evenimentul $\omega \in \Omega$ ia valoarea x^p.

1. **Moment de ordinul** p al variabilei ξ se numește integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^p \mathrm{d}F(x),$$

dacă aceasta există, $F(x)$ fiind funcția de repartiție a variabilei ξ, și se notează $M_p(\xi)$ (dacă nu se creează confuzii variabila se omite și se scrie M_p). Pentru $p=1$, se scrie $M(\xi)$.

Integrala de mai sus este integrală de tip Stieltjes.

Dacă variabila ξ are densitatea ρ, atunci M_p se scrie

$$M_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p \rho(x)\,\mathrm{d}x,$$

iar dacă variabila ξ *este de tip discret* $\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$ $(i=1, 2, \ldots)$, *atunci*

$$M_p = \sum_i x_i^p \cdot p_i,$$

unde $p_i = P(\xi(\omega) = x_i)$ și

$$\sum_i p_i = 1.$$

2. **Momentul absolut, de ordinul** p, al variabilei ξ se definește prin

$$\overline{M}_p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \, dF(x)$$

și este momentul variabilei $|\xi|^p$: $\overline{M}_p(\xi) = M(|\xi|^p)$, dacă integrala în sensul Stieltjes există.

Dacă momentul absolut de ordinul p, există, atunci există și momentul M_p.

3. **Se numește moment centrat în** a **de ordinul** p al variabilei ξ momentul de ordinul p al variabilei $\xi - a$:

$$\nu_p(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^p \, dF(x).$$

Dacă $a = M_1$, momentele se numesc *momente inițiale*

$$\mu_p = \int_{-\infty}^{\infty} (x-M_1)^p \, dF(x).$$

Între momentele inițiale și momentele centrate există relația

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (a-M_1)^{n-k} \cdot \nu_k(a).$$

Momentele variabilei $|\xi - a|^p$ se numesc *momente absolute centrate de ordinul* p și se notează $\bar{\nu}_p$.

Dacă variabila aleatoare ξ are momente absolute centrate de ordinul k, atunci pentru $t < \tau < k$ există inegalitățile:

$$\sqrt[t]{\bar{\nu}_t} \leqslant \sqrt[\tau]{\bar{\nu}_\tau} \leqslant \sqrt[k]{\bar{\nu}_k},$$

unde

$$\bar{\nu}_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x-a|^k \, dF(x).$$

4. **Medii.** *Expresia*

$$m_p(\xi) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^p dF(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \neq 0,$$

se numește medie de ordinul p a variabilei ξ, dacă membrul al doilea există, $F(x)$ fiind funcția de repartiție a variabilei ξ.

Pentru $p=1$, m_1 se numeşte *medie aritmetică*:

$$m_1=\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$$

şi se notează adesea cu $\bar{\xi}$.

Pentru $p=-1$, m_{-1} se numeşte *medie armonică* şi

$$m_{-1}=\frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dF(x)}.$$

Dacă ξ este variabilă pozitivă, atunci

$$m_0=e^{\int_0^{\infty}\ln x\,dF(x)}$$

se numeşte *medie geometrică.*

5. Proprietăţile mediei aritmetice:

1) Variabila $\xi=k$ (constantă) are valoarea medie egală cu k.

2) Dacă variabila ξ are media m_1, atunci variabila $\xi-m_1$ are media zero.

3) Dacă variabila ξ are media $\bar{\xi}$ şi variabila η are media $\bar{\eta}$, atunci variabila $a\xi+b\eta$ are media $a\bar{\xi}+b\bar{\eta}$ sau

$$\overline{a\xi+a\eta}=a\bar{\xi}+b\bar{\eta}.$$

4) Dacă variabilele ξ şi η sînt independente, atunci variabila $\xi\eta$ are media $\bar{\xi}\bar{\eta}$ sau încă

$$\overline{\xi\cdot\eta}=\bar{\xi}\cdot\bar{\eta}.$$

6. Dispersia. *Se numeşte dispersie momentul iniţial de ordinul al doilea*

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{\xi})^2\,dF(x).$$

Dispersia se înseamnă adesea cu σ^2, iar

$$\sqrt{D\xi}=\sigma$$

se numeşte *abatere medie pătratică* sau *abatere tip.*

Dispersia are proprietăţile următoare:

1) Dacă variabila ξ este constantă, atunci dispersia ei este nulă.

2) Dacă variabila ξ are dispersia D_ξ şi variabila η are dispersia D_η, ξ şi η fiind independente, atunci variabila $a\xi+b\eta$ are dispersia

$$a^2D_\xi+b^2D_\eta.$$

Pentru variabila ξ, cu media $\bar{\xi}$ şi dispersia D, variabila

$$\xi^*=\frac{\xi-\bar{\xi}}{\sqrt{D}}$$

se numeşte *normată*. Variabila normată are media zero şi dispersia 1.

7. **Medii condiţionate.** Dacă $F(x/B)$ înseamnă funcţia de repartiţie condiţionată a variabilei ξ, $F(x/B)=P_B\{\omega;\xi(\omega)<x\}$, atunci

$$m_B=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x/B)$$

se numeşte *valoare medie condiţionată.*

Inegalitatea lui Cebîşev. Dacă pentru variabila ξ există momentul absolut de ordinul n, atunci

$$P(|\xi|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{M_n(|\xi|)}{n} \quad \text{şi} \quad P(|\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{M_n}{n}.$$

In particular pentru $n=2$,

$$P(|\xi-\bar{\xi}|<k\sigma)\geqslant 1-\frac{1}{k^2}.$$

8. **Coeficientul de corelaţie.** Dacă variabila aleatoare cu două dimensiuni (ξ,η) are funcţia de repartiţie $F(x,y)$, atunci se numeşte *moment iniţial mixt de ordinul jk* expresia

$$m_{jk}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{\xi})^j\cdot(y-\bar{\eta})^k\mathrm{d}F(x,y).$$

Se numeşte coeficient de corelaţie şi se notează cu r, expresia

$$r=\frac{m_{11}}{\sqrt{m_{02}\cdot m_{20}}}.$$

Adesea $\sqrt{m_{02}}$ şi $\sqrt{m_{20}}$ se înseamnă prin σ_η, respectiv σ_ξ şi

$$r_{\xi\eta}=\frac{m_{11}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}=\frac{M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)}{\sigma_\xi\sigma_\eta},$$

unde

$$M(\xi\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\,dF(x,y).$$

Dacă variabilele ξ şi η sînt independente, atunci $r=0$; în general,

$$|r|\leqslant 1.$$

Dacă $r=1$ sau $r=-1$, variabilele ξ şi η se numesc liniar corelate.

Dacă pentru fiecare y fix, notăm

$$F_y(x)=P(\xi<x,\ \eta=y)$$

şi

$$\bar{\xi}_y=\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_y(x),$$

funcţia $y\to\bar{\xi}_y$ *este o variabilă aleatoare care se numeşte medie condiţionată a lui* ξ *faţă de* η.

Analog se defineşte media condiţionată a lui η faţă de ξ.

Se numesc *coeficienţi de regresiune* numerele

$$\rho_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y},\quad \rho_{yx}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

şi reprezintă respectiv coeficientul de regresiune a lui ξ faţă de η şi a lui η faţă de ξ.

Dreptele

$$y-\bar{\eta}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{\xi})$$

şi

$$x-\bar{\xi}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{\eta})$$

se numesc *dreptele de regresiune*, respectiv a lui η faţă de ξ şi a lui ξ faţă de η.

9. Mediana. Pentru variabila aleatoare ξ cu funcţia de repartiţie $F(x)$, *se numeşte mediană valoarea* x_0 *a lui* ξ *pentru care*

$$F(x_0)=\frac{1}{2}.$$

Dacă există mai multe puncte cu proprietatea de mai înainte, ele formează un *interval median*; atunci alegem drept mediană acea valoare x_0 pentru care

$$1-F(x_0+0)=F(x_0-0).$$

10. Moda sau modulul. Presupunem variabila aleatoare ξ cu densitatea $\rho(x)$. *Se numeşte moda variabilei* ξ *valoarea lui* x *pentru care* $\rho(x)$ *este maxim.*

Dacă distribuţia $\rho(x)$ are mai multe mode atunci ea se numeşte *plurimodală.*

PROBLEME

1. Să se arate că pentru orice s avem

$$\sqrt[s]{\nu_s} \leqslant \sqrt[s+1]{\nu_{s+1}},$$

unde $\nu_s=M[|\xi-m|^s]$ şi m este media variabilei ξ.

Soluţie. Pentru a demonstra această inegalitate să pornim de la forma pătratică pozitivă în u şi v:

$$0\leqslant Q(u,v)=M\left[\left\{|\xi-m|^{\frac{s-1}{2}}\cdot u+|\xi-m|^{\frac{s+1}{2}}v\right\}^2\right]=$$

$$=M[|\xi-m|^{s-1}]\cdot u^2+2M[|\xi-m|^s]\cdot uv+M[|\xi-m|^{s+1}]\cdot v^2=$$

$$=\nu_{s-1}\cdot u^2+2\nu_s uv+\nu_{s+1}\cdot v^2.$$

De unde rezultă că $\nu_1^2\leqslant\nu_{s-1}\nu_{s+1}$ sau $\nu_1^{2s}\leqslant\nu_{s-1}^s\cdot\nu_{s+1}^s$.

Dînd lui s valorile 1, 2, ..., s obţinem şirul de inegalităţi

$$\nu_1^2\leqslant\nu_2$$

$$\nu_2^4\leqslant\nu_1^2\cdot\nu_3^2$$

$$\nu_3^6\leqslant\nu_2^3\cdot\nu_4^3$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\nu_{s-2}^{2(s-2)}\leqslant\nu_{s+3}^{s-2}\cdot\nu_{s-1}^{s-2}$$

$$\nu_{s-1}^{2(s-1)}\leqslant\nu_{s-2}^{s-1}\cdot\nu_s^{s-1}$$

$$\nu_s^{2s}\leqslant\nu_{s-1}^s\cdot\nu_{s+1}^s.$$

Inmulțind aceste inegalități membru cu membru, obținem

$$\nu_1^2\nu_2^4\nu_3^6\dots\nu_{s-1}^{2(s-1)}\nu_s^{2s}\leqslant\nu_1^2\nu_2^4\nu_3^6\dots\nu_{s-1}^{2(s-1)}\nu_s^{1-s}\nu_{s+1}^{s},$$

de unde $\nu_s^{s+1}\leqslant\nu_{s+1}^{s}$.

Extrăgînd rădăcina de ordinul $s(s+1)$ obținem

$$\sqrt[s]{\nu_s}\leqslant\sqrt[s+1]{\nu_{s+1}}.$$

Această inegalitate este întîlnită sub numele de *inegalitatea lui Liapunov.*

2. Dacă ξ și η sînt două variabile aleatoare, astfel încît pentru $|\xi|$ există momentul de ordinul r și pentru $|\eta|$ momentul de ordinul s, să se demonstreze următoarele inegalități între momente:

1) $\overline{M}_r(\xi+\eta)\leqslant C_r\overline{M}_r(\xi)+C_r\overline{M}_r(\eta)$,

unde $0<r\leqslant s$, $C_r=1$ sau cu 2^{r-1}, după cum $r\leqslant 1$ sau $r>1$.

2) $M(|\xi\eta|)\leqslant m_r(|\xi|)\cdot m_s(|\eta|)$,

unde $r>1$, $s>1$ și $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$.

3) $m_r(|\xi+\eta|)\leqslant m_r(|\xi|)+m_r(|\eta|)$,

pentru $r>1$.

4) $M^2(|\xi\eta|)\leqslant M(|\xi|^2)\,M(|\eta|^2)$.

5) $\ln M(|\xi|^r)\leqslant\frac{1}{2}\ln M(|\xi|^{r-r'})+\frac{1}{2}\ln M(|\xi|^{r+r'})$.

Soluție. Pentru a demonstra prima inegalitate ne vom folosi de următoarea relație:

$$|a+b|^r\leqslant C_r|a|^r+C_r|b|^r,\quad r>0, \tag{α}$$

unde $C_r=1$ sau 2^{r-1}, după cum $r\leqslant 1$ sau $r>1$. Să înlocuim pe a cu ξ și pe b cu η, apoi să calculăm valoarea medie. Rezultă

$$M(|\xi+\eta|^r)\leqslant C_rM(|\xi|^r)+C_rM(|\eta|^r)$$

sau

$$\overline{M}_r(\xi+\eta)\leqslant\overline{M}_r(\xi)+\overline{M}_r(\eta).$$

2) Să înlocuim în inegalitatea

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^r}{r} + \frac{|b|^s}{s}, \text{ unde } r>1, \quad s>1 \text{ şi } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$

$$\text{pe } a = \frac{|\xi|}{m_r(|\xi|)} \text{ şi } b = \frac{|\eta|}{m_s(|\eta|)}.$$

Rezultă inegalitatea $|\xi\eta| \leqslant \alpha|\xi|^r + \beta|\eta|^s$ (α, β constante), din care deducem că $M(|\xi\eta|)$ există; integrînd, găsim inegalitatea

$$M(|\xi\eta|) \leqslant m_r(|\xi|) \cdot m_s(|\eta|)$$

care se numeşte *inegalitatea lui Hölder.*

3) Dacă în inegalitatea

$$|\xi+\eta|^r \leqslant |\xi| \cdot |\xi+\eta|^{r-1} + |\eta| \cdot |\xi+\eta|^{r-1}$$

transformăm membrul al doilea, folosind inegalitatea

$$|a_1a_2+b_1b_2| \leqslant (|a_1|^r + |a_2|^r)^{\frac{1}{r}} (|b_1|^s + |b_2|^s)^{\frac{1}{s}},$$

dedusă din inegalitatea lui Hölder, obţinem

$$|\xi+\eta|^r \leqslant |\xi| \cdot |\xi+\eta|^{r-1} + |\eta| \cdot |\xi+\eta|^{r-1} \leqslant$$

$$\leqslant (|\xi|^r + |\eta|^r)^{\frac{1}{r}} (2 \cdot |\xi+\eta|^{r(s-1)})^{\frac{1}{s}}.$$

Din această inegalitate rezultă că $M(|\xi+\eta|^r)$ există. Integrînd, se obţine inegalitatea cerută, care este întîlnită sub numele de *inegalitatea lui Minkowski.*

4) Să facem acum în inegalitatea lui Hölder $r=s=2$. Vom obţine inegalitatea

$$(M(|\xi\eta|))^2 \leqslant M(|\xi|^2)\, M(|\eta|^2)$$

care se mai numeşte şi *inegalitatea lui Schwartz.*

5) Înlocuind pe ξ cu $|\xi|^{\frac{r-r'}{2}}$ şi pe η cu $|\eta|^{\frac{r+r'}{2}}$ cu $r' < r$ şi luînd logaritmii în ambii termeni, obţinem inegalitatea

$$\ln(M|\xi|^2) \leqslant \frac{1}{2}\ln(M|\xi|^{r-r'}) + \frac{1}{2}\ln(M|\xi|^{r+r'}).$$

3. Dacă ξ_i sînt variabile aleatoare nenegative, legate sau nu, $q>0$ întreg şi $0<f<1$, să se arate că

$$0 \leqslant M(S_n^{q+f}) - \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i^{q+f}) \leqslant \sum{}' \frac{q!}{h_1! \ldots h_n!} M(\xi_1^{h_1} \ldots \xi_n^{h_n} \xi_i^f)$$

unde $h_i \geqslant 0$ sînt întregi, astfel ca $\sum_{i=1}^{n} h_i = q$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ $(n=1, 2, \ldots, n)$; sub semnul $\sum'$ figurează $n^{q+1} - n$ produse de ξ_i, conținînd cel puțin doi factori ξ cu indici distincți (fiecare factor este cel mult la puterea a doua și gradul fiecărui produs este $q+f$).

Soluție. Se știe din algebră că pentru orice întreg $q>0$ avem

$$(\xi_1 + \ldots + \xi_n)^q = \sum \frac{q!}{h_1! \ldots h_n!} \xi_1^{h_1} \ldots \xi_n^{h_n} \quad \left(h_i \geqslant 0 \text{ întregi și } \sum_{i=1}^{n} h_i = q\right).$$

Pe de altă parte, din inegalitatea lui Minkovski rezultă că

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i^p, \quad \text{dacă} \quad 0<p<1$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^p \geqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i^p, \quad \text{dacă} \quad p \geqslant 1.$$

Deci pentru $0 \leqslant f < 1$ se poate scrie

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{q+f} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^{q+f} \leqslant \sum \frac{q!}{h_1! \ldots h_n!} \xi_1^{h_1} \ldots \xi_n^{h_n} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^f\right).$$

Separînd în membrul drept termenii ξ_i^{q+f}, avem

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{q+f} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^{q+f} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{q+f} + \sum' \frac{q!}{h_1! \ldots h_n!} \xi_1^{h_1} \ldots \xi_n^{h_n} \xi_i^f;$$

trecînd la valoarea medie, se obține inegalitatea cerută.

4. Dacă $P(A)$ și $P(B)$ sînt probabilitățile evenimentelor A și B și $A \cap B = \emptyset$, să se arate că:

1) $M_{A \cup B}(f) = \dfrac{P(A) \cdot M_A(f) + P(B) M_B(f)}{P(A \cup B)}$

2) $M(f) = P(A) \cdot M_A(f) + P(\complement A) \cdot M_{\complement A}(f)$.

Soluție. 1) Din definiția momentului condiționat rezultă

$$M_{A \cup B}(\xi) = \frac{1}{P(A \cup B)} \int_{A \cup B} \xi(\omega) P(d\omega)$$

sau

$$M_{A\cup B}(\xi)=\frac{1}{P(A\cup B)}\left(\int_A \xi(\omega)\,P(\mathrm{d}\omega)+\int_B \xi(\omega)\,P(\mathrm{d}\omega)\right)=$$

$$=\frac{1}{P(A\cup B)}\left[P(A)\int_A \frac{\xi(\omega)}{P(A)}P(\mathrm{d}\omega)+P(B)\int_B \frac{\xi(\omega)}{P(B)}P(\mathrm{d}\omega)\right]=$$

$$=\frac{P(A)\,M_A(f)+P(B)\,M_B(f)}{P(A\cup B)}.$$

2) Dacă luăm în egalitatea de mai sus $B=\complement A$ şi ţinem seamă că $A\cup\complement A=E$ şi $P(E)=1$, obţinem

$$M(\xi)=P(A)\cdot M_A(\xi)+P(\complement A)\cdot M_{\complement A}(\xi).$$

5. Fie ξ o variabilă aleatoare care ia valorile $\xi_i=i$ $(i=1, 2, \ldots)$ cu probabilităţile espective p, qp, q^2p, ..., $q^{i-1}p$, ..., unde $p+q=1$. Se cere:

a) Să se calculeze valoarea medie.

b) Să se calculeze momentul de ordinul al doilea.

c) Să se afle dispersia variabilei ξ.

Soluţie. a) Avem

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i\xi_i=p\,(1+2q+3q^2+\ldots+iq^{i-1}+\ldots).$$

Să observăm însă că

$$q+q^2+\ldots+q^i+\ldots=\frac{q}{1-q},$$

de unde rezultă

$$1+2q+\ldots+iq^{i-1}+\ldots=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\frac{q}{(1-q)}=\frac{1}{p^2} \qquad (1)$$

şi deci

$$M(\xi)=\frac{1}{p}.$$

b) Momentul de ordinul al doilea este dat de expresia

$$M_2(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2p_i=p\,(1^2+2^2q+3^2q^2+\ldots+i^2q^{i-1}+\ldots).$$

Să înmulţim egalitatea (1) cu q:

$$q+2q^2+3q^3+\ldots+iq^i+\ldots=\frac{q}{(1-q)^2}.$$

Derivînd această egalitate în raport cu q, obținem

$$1^2+2^2q+3^2q^2+\ldots=\frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Folosind acest rezultat, avem

$$M_2(\xi)=\frac{p(1+q)}{(1-q)^3}=\frac{(1-q)(1+q)}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{(1-q)^2}.$$

c) Dispersia variabilei ξ este

$$D^2(\xi)=M_2(\xi)-(M(\xi))^2=\frac{1+q}{(1-q)^2}-\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{q}{(1-q)^2}$$

și deci

$$D^2(\xi)=\frac{q}{p^2}.$$

6. Să se calculeze valoarea medie, dispersia și abaterea medie pătratică a unei variabile aleatoare ξ care urmează legea binomială.

Soluție. O variabilă aleatoare ξ urmează legea binomială, dacă ia valorile 0, 1, ..., n (numere întregi) și anume ia valoarea k cu probabilitatea $C_n^k p^k q^{n-k}$ ($k=0, 1, \ldots, n$), unde $0<p<1$ și $q=1-p$.

Valoarea medie este

$$M(\xi)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}=np\sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r p^r q^{n-1-r}=np.$$

Iar dispersia,

$$D^2(\xi)=M_2(\xi)-(M_1(\xi))^2=\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k p^k q^{n-k}-(np)^2=$$

$$=p^2n(n-1)\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2}p^{k-2}q^{n-k}+np-(np)^2=$$

$$=p^2n(n-1)+np-(np)^2=np(1-p)=npq.$$

Abaterea medie pătratică este

$$\sigma=\sqrt{npq}.$$

7. Fie ξ variabilă aleatoare cu densitatea de repartiție dată de

$$\rho(x)=Ae^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Să se determine constanta A și să se calculeze valoarea medie, dispersia, abaterea medie pătratică, coeficientul de asimetrie și excesul variabilei.

Soluție. Din proprietățile funcției de repartiție rezultă:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\,dx=2A\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=2A,$$

deci

$$A=\frac{1}{2}.$$

Celelalte caracteristici sînt date de

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}xe^{-|x|}dx=0,$$

$$D^2(\xi)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}dx=\int_{0}^{\infty}x^2x^{-x}dx=2,$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{2}.$$

Deoarece repartiția dată este simetrică, coeficientul de asimetrie este egal cu zero.

Pentru a calcula excesul, vom calcula momentul centrat de ordinul al patrulea. Deoarece $M(\xi)=0$, avem

$$\mu_4=2\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}x^4e^{-x}dx=24,$$

de unde

$$\mathrm{Ex}(\xi)=\frac{\mu_4}{(\sigma(\xi))^4}-3=3.$$

8. *Problema lui Banach.* Formînd variabila aleatoare, definită în problema lui Banach din cap. I (nr. 14):

$$\xi=\begin{pmatrix} k \\ C_{2n-k}^{n}\cdot\dfrac{1}{2^{2n-k}} \end{pmatrix}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

să se calculeze valoarea medie a variabilei ξ.

Soluție. Vom nota $M(\xi)=\mu$. Știind că suma probabilităților este 1, avem

$$n-\mu=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cdot C_{2n-k}^{n}\frac{1}{2^{2n-k}}=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cdot C_{2n-k}^{n-k}\frac{1}{2^{2n-k}},$$

deoarece

$$\mu=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot C_{2n-k-1}^{n}\frac{1}{2^{2n-k-1}}.$$

Vom calcula suma

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2n-k)\cdot C_{2n-k-1}^{n-k-1}\frac{1}{2^{2n-k}}=$$

$$=\frac{2n+1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n-k-1}^{n-k-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\cdot C_{2n-k-1}^{n-k-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}}.$$

Cum

$$1-C_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n-(k+1)}^{n-(k+1)},$$

deducem că

$$n-\mu=\frac{2n+1}{2}\left(1-C_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}\right)-\frac{1}{2}\cdot\mu,$$

de unde

$$\mu=\frac{2n+1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}-1.$$

Folosind formula lui Stirling, rezultă că

$$\mu=2\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}-1.$$

Dacă în particular luăm $n=50$, atunci

$$\mu=7{,}04.$$

9. Fie $f(x)=C_k^x p^x(1-p)^{k-x}$ (x este număr natural) densitatea distribuției binomiale; notînd

$$\varphi(x)=\frac{f(x+1)}{f(x)}\cdot(x+1),$$

să se arate că

$$\varphi(x)+\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}x=\frac{\mu_1^2}{\mu_2}. \qquad (1)$$

Soluție. Dacă

$$f(x)=C_k^x p^x(1-p)^{k-x},$$

atunci

$$f(x+1)=C_k^{x+1}p^{x+1}(1-p)^{k-x-1}=$$

$$=C_k^x\frac{k-x}{x+1}\cdot\frac{p}{1-p}p^x(1-p)^{k-x}=\frac{k-x}{x+1}\cdot\frac{p}{1-p}\cdot f(x),$$

întrucît $C_k^x=\frac{k-x+1}{x}C_k^{x-1}$.

Pe de altă parte, folosind valorile momentelor de ordinul întîi și al doilea ale distribuției binomiale, date de egalitățile

$$\mu_1 = pk, \quad \mu_2 = p(1-p) \quad k(\mu_1 > \mu_2),$$

obținem

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} = \frac{p}{1-p} \tag{2}$$

și

$$\frac{\mu_1^2}{\mu_2} = \frac{pk}{1-p}. \tag{3}$$

Înlocuind în (1) pe $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}$ prin valoarea sa din (2), obținem

$$\varphi(x) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot x = \frac{pk}{1-p}.$$

După egalitatea (3), acest rezultat este egal cu $\frac{\mu_1^2}{\mu_2}$.

10. Densitatea de repartiție a vieții medii a unei lămpi electronice a unui aparat de radio cu 6 lămpi este

$$\lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

cu $t > 0$ dat în ani și $\lambda = 0{,}25$.

Se cere să se determine probabilitatea ca în mai puțin de 6 ani nici o lampă de radio să nu fie schimbată (din cauza arderii ei).

Soluție. Viețile medii ale lămpilor sînt considerate evenimente independente. Probabilitatea ca viața medie a unei lămpi să fie mai mare de 6 ani este

$$P_1 = \int_6^\infty \lambda^2 t e^{-\lambda t}\, dt;$$

făcînd schimbarea de variabilă $\lambda t = u$, obținem

$$P_1 = \int_{6\lambda}^\infty u e^{-u}\, du = (1 + 6\lambda) e^{-6\lambda} = 0{,}56$$

și deci probabilitatea căutată este

$$P = P_1^6 = (0{,}56)^6 = 0{,}031.$$

Aceasta ne arată că dintre 1000 de aparate de radio numai la 30 de aparate trebuie înlocuite lămpile înainte de a fi folosite timp de 6 ani.

11. Să se arate că momentele centrate ale distribuției normale sînt date de

$$\mu_s=(s-1)!!\,\sigma^s,$$

unde $(s-1)!!$ este produsul numerelor impare de la 1 la $s-1$.

Soluție. Avem

$$\mu_s=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^s g(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^s e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx;$$

făcînd substituția $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}=t$, obținem

$$\mu_s=\frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^s e^{-t^2}dt.$$

Integrînd prin părți,

$$\mu_s=\frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^{s-1}te^{-t^2}dt=$$

$$=\frac{(\sigma\sqrt{2})^2}{\sqrt{\pi}}\left\{-\frac{1}{2}e^{t^2}t^{s-1}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{s-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}t^{s-2}e^{-t^2}dt\right\},$$

de unde rezultă că

$$\mu_s=\frac{(s-1)(\sigma\sqrt{2})^s}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^{s-2}e^{-t^2}dt.$$

Analog, vom obține

$$\mu_{s-2}=\frac{(\sigma\sqrt{2})^{s-2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^{s-2}e^{-t^2}dt$$

și deci

$$\mu_s=(s-1)\,\sigma^2\mu_{s-2}.$$

Deoarece $\mu_0=1$, iar $\mu_1=0$, rezultă că

$$\mu_2=\sigma^2,\quad \mu_4=3\sigma^4,\quad \mu_6=15\sigma^6$$

și în general

$$\mu_s=(s-1)!!\,\sigma^s.$$

12. Să se calculeze momentele de ordinul întîi și al doilea și dispersia repartiției normale cu ajutorul funcției generatoare a momentelor.

Soluţie. Prin definiţie funcţia generatoare a momentelor este

$$m_n(t)=M(e^{\xi t})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\rho(x)\,dx$$

de unde

$$m_n(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} e^{xt}\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx;$$

făcînd substituţia $z=\frac{x-a}{\sigma}$, obţinem

$$m_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(z\sigma+a)t-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Deoarece

$$(z\sigma+a)t-\frac{z^2}{2}=at-\frac{1}{2}(z^2-2t\sigma z)=at+\frac{t^2\sigma^2}{2}(z-t\sigma)^2,$$

avem

$$m_n(t)=e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t\sigma)^2}\,dz;$$

însă

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-t\sigma)^2}{2}}\,dz=1,$$

ceea ce se verifică uşor făcînd substituţia $z-\sigma t=u$. Deci funcţia generatoare a momentelor repartiţiei normale este

$$m_n(t)=e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Prin derivare obţinem:

$$m_n'(t)=(a+t\sigma^2)\,e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}},$$

$$m_n''(t)=(t^2\sigma^4+2at\sigma^2+a^2+\sigma^2)\,e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Făcînd pe $t=0$, obţinem

$$M(\xi)=a,\quad M_2(\xi)=a^2+\sigma^2,\quad D^2(\xi)=M_2(\xi)-(M_1(\xi))^2=\sigma^2.$$

13. Să se calculeze dispersia unei variabile aleatoare, ξ, a cărei densitate de repartiţie este dată de

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}};\ -\infty<x<+\infty.$$

Soluţie. Deoarece $\rho(x)$ este o funcţie pară, rezultă că $M(\xi)=0$ şi deci

$$D^2(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dx.$$

Făcînd substituţia $\frac{x^2}{1+x^2}=v$, obţinem

$$D^2(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{n}{2}-2}\,dv=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Insă

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)$$

şi deci $D^2(\xi)=\frac{1}{n-2}$, de unde rezultă că

$$D(\xi)=\frac{1}{\sqrt{n-2}},$$

dacă $n\geqslant 3$.

14. Densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ este

$$\rho_\xi(x)=\frac{1}{2a}e^{-\frac{|x-a|}{a}},\ -\infty<x<+\infty;$$

(*repartiţie Laplace*). Să se determine $M(\xi)$ şi $D(\xi)$.

Soluţie. Din definiţia valorii medii rezultă

$$M(\xi)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{|x-a|}{a}}\,dx.$$

Știind că

$$|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{dacă } x>a \\ -(x-a), & \text{dacă } x<a \end{cases}$$

rezultă

$$M(\xi)=\frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{a} x e^{\frac{x-a}{a}}\,dx+\int_{a}^{+\infty} e^{-\frac{x-a}{a}}\,dx\right]=a\int_{0}^{+\infty} te^{-t}\,dt=a.$$

Vom calcula pe $D(\xi)$ prin relația

$$D^2(\xi)=M_2(\xi)-M^2(\xi).$$

Momentul de ordinul al doilea este

$$M_2(\xi)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{|x-a|}{a}}\,dx=3a^2.$$

Deci

$$D^2(\xi)=3a^2-a^2=2a^2 \quad \text{și} \quad D(\xi)=a\sqrt{2}.$$

15. Să se arate că funcția definită prin:

$$f(0,\ t)=0$$

$$f(n,\ t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1} \qquad n=1, 2, \ldots,\ \lambda t>0$$

poate reprezenta o densitate de repartiție a unei variabile aleatoare care ia valorile $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Să se arate că media ei și varianța sînt date respectiv de $e^{\lambda t}$ și $e^{2\lambda t}-e^{\lambda t}$.

Soluție. Se observă că pentru orice n, $f(n,\ t)\geqslant 0$. Pentru ca $f(n,\ t)$ să fie o densitate va trebui ca $\sum_{n=0}^{\infty} f(n,\ t)=1$.

Într-adevăr,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n,\ t)=e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}=e^{-\lambda t}\frac{1}{e^{-\lambda t}}=1,$$

seria reducîndu-se la sumarea unei progresii geometrice cu rația $1-e^{-\lambda t}<1$.

Pentru variabila ξ, cu densitatea $f(n,\ t)$, avem

$$M(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot f(n,\ t)=e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty} n(1-e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

Pentru calculul sumei din membrul al doilea, plecăm de la relația

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-\lambda t})^n=e^{\lambda t},$$

în care derivăm în raport cu t; avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\lambda \cdot e^{-\lambda t}=\lambda e^{\lambda t} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(1-e^{-\lambda t})^{n-1}=e^{2\lambda t}.$$

Pentru valoarea medie avem

$$M(\xi)=e^{-\lambda t}\cdot e^{2\lambda t}=e^{\lambda t}.$$

Pentru varianţă vom calcula momentul de ordinul al doilea

$$M_2(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 f(n,\ t)=e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(1-e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

Analog ca pentru suma de mai sus, găsim

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(1-e^{-\lambda t})^{n-1}=2e^{3\lambda t}-e^{2\lambda t}$$

şi momentul de ordinul al doilea are valoarea

$$M_2(\xi)=2e^{2\lambda t}-e^{\lambda t}.$$

Varianţa este

$$D^2(\xi)=M_2(\xi)-M_1^2(\xi)=2e^{2\lambda t}-e^{\lambda t}-e^{2\lambda t}.$$

16. Se dă distribuţia

$$dF=\frac{k}{(1+x^2)^m}dx; \quad -\infty<x<+\infty; \quad 1\leqslant m.$$

Se cere:

a) Să se determine constanta k, astfel ca F să fie funcţie de repartiţie.

b) Să se calculeze momentul de ordinul $2r$.

Soluţie. a) Din proprietăţile funcţiei de repartiţie rezultă

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)=k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^m}dx.$$

Pentru a calcula această integrală observăm că distribuţia este simetrică în raport cu originea. Făcînd schimbarea de variabilă $x=u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}$ $(0\leqslant u\leqslant 1)$ şi ţinînd seama de definiţia funcţiei beta,

$$B(x,\ y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$$k=\frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)}.$$

b) Prin definiție, momentul de ordinul $2r$ este

$$m_{2r}=\int_{-\infty}^{\infty}x^{2r}\,dF(x)=k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2r}}{(1+x^2)^m}\,dx.$$

Integrala din membrul al doilea este convergentă, dacă $2m>2r+1$, deci momentele de ordinul $2r$ mai mic decît $2m-1$ există, cu excepția valorii $m=1$. Aceasta se constată imediat, observînd că

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n'\to\infty}}\int_{-n}^{n'}\frac{kx}{(1+x^2)}\,dx$$

nu există, deși partea principală a integralei este zero.

Făcînd substituția $u=\frac{1}{1+x^2}$, rezultă

$$m_{2r}=k\int_0^1(1-u)^{r-\frac{1}{2}}u^{m-r-\frac{3}{2}}\,du=k\,\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-r-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m)}.$$

Înlocuind valoarea lui k, determinată la punctul (a), obținem pentru momentul de ordinul $2r$ valoarea

$$m_{2r}=\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-r-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)}.$$

17. Să se găsească media geometrică și media armonică a variabilei ξ, a cărei densitate este

$$\rho(x)=\frac{1}{B(p,q)}(1-x)^{p-1}x^{q-1}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

Soluție. Din definițiile mediei geometrice (G) și a celei armonice (H), rezultă

$$\ln G=\frac{1}{B(p,q)}\int_0^1(1-x)^{p-1}x^{q-1}\ln x\,dx.$$

Insă

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1}\,dx = B(p,\ q),$$

de unde

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} \ln x\,dx = \frac{\partial}{\partial q} B(p, q)$$

şi deci

$$\ln G = \frac{1}{B(p,q)} \frac{\partial}{\partial q} B(p,\ q) = \frac{\partial}{\partial q} \ln \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Media armonică este

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-2}\,dx = \frac{B(p,\ p-1)}{B(p,\ q)}$$

sau

$$\frac{1}{H} = \frac{\Gamma(q-1)}{\Gamma(p+q-1)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} = \frac{p+q-1}{q-1};$$

deci

$$H = \frac{q-1}{p+q-1}.$$

18. Se dă variabila aleatoare ξ cu densitatea

$$p(x) = \frac{1}{B(p,q)} (1-x)^{p-1} x^{q-1} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Se cere:

a) Să se afle primele două momente.

b) Să se afle dispersia.

Soluţie. a) Prin definiţie, avem

$$M_1 = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q}\,dx = \frac{B(p,\ q+1)}{B(p,\ q)} =$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} = \frac{q}{p+q}.$$

Deci

$$M_1 = \frac{q}{p+q}.$$

Analog, avem

$$M_2 = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q+1}\,dx = \frac{B(p,\ q+2)}{B(p,\ q)}.$$

Făcînd calculele, obținem

$$M_2 = \frac{q(q+1)}{(p+q)(p+q+1)}.$$

b) Dispersia este dată de egalitatea $\sigma^2 = M_2 - M_1^2$. Înlocuind valorile calculate mai sus, obținem

$$\sigma^2 = \frac{pq}{(p+q+1)\cdot(p+q)^2}.$$

19. Să se arate că dacă $F(x)$ este funcția de repartiție a unei variabile aleatoare ξ și $M(\xi)=0$, $M(\xi^2)=\sigma^2$, avem:

$$F(x) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2+x^2} \text{ pentru } x<0$$

și $F(x) \geqslant \frac{x^2}{\sigma^2+x^2}$ pentru $x>0$.

Soluție. Pentru $x<0$ avem $\left(\text{deoarece } \int_{-\infty}^{\infty} y\,dF(y) = 0\right)$;

$$-x = \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)\,dF(y) \leqslant \int_{x}^{\infty} (y-x)\,dF(y),$$

de unde

$$x^2 \leqslant \left(\int_{x}^{\infty} (y-x)\,dF\right)^2 \leqslant \int_{x}^{\infty} dF \int_{x}^{\infty} (y-x)^2\,dF \leqslant (1-F(x))\cdot(\sigma^2+x^2)$$

și deci $(1-F(x))(\sigma^2+x^2) \geqslant x^2$ sau

$$F(x) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2+x^2}.$$

În mod analog, avem pentru $x>0$

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} (y+x)\,dF(y) \leqslant \int_{-\infty}^{x} (y-x)\,dF(y)$$

sau

$$x^2 \leqslant \int_{-\infty}^{x} dF \int_{-\infty}^{x} (y+x)^2\,dF(y) \leqslant F(x)(\sigma^2+x^2),$$

de unde

$$F(x) \geqslant \frac{x^2}{\sigma^2+x^2}.$$

20. Să se arate că dacă pentru variabila aleatoare ξ, $M(e^{a\xi})$ există ($a>0$), atunci

$$P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M(e^{a\xi})}{e^{a\varepsilon}}.$$

Soluție. Să notăm cu $A=\{\omega;\ \xi(\omega)\geqslant\varepsilon\}$; plecînd de la definiția valorii medii, avem

$$M(e^{a\xi})=\int e^{ax}\,dF(x)=\int\limits_{A} e^{ax}\,dF(x)+\int\limits_{\complement A} e^{ax}\,dF(x).$$

Cum termenii integralei din membrul al doilea sînt pozitivi, avem

$$M(e^{a\xi}) \geqslant \int\limits_{A} e^{ax}\,dF(x).$$

Pe mulțimea A, funcțiunea $e^{a\xi}$ are valoarea minimă $e^{a\varepsilon}$; deci

$$M(e^{a\xi}) \geqslant e^{a\varepsilon} \int\limits_{A} dF(x)=e^{a\varepsilon}\cdot P(A),$$

de unde rezultă

$$P(A) \leqslant \frac{M(e^{a\xi})}{e^{a\varepsilon}}.$$

21. Să se arate că

$$P(-\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta) \geqslant 1-\frac{\nu_2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}=\frac{4\alpha\beta-4\nu_2}{(\alpha+\beta)^2},$$

unde $-\alpha$ și β sînt două numere, astfel încît $m=\frac{\beta-\alpha}{2}$.

Soluție. Dacă $\nu_k=M(|\xi-m|^k)$, atunci după inegalitatea lui Cebîșev avem

$$P(|\xi-m|<\varepsilon) \geqslant 1-\frac{\nu_k}{\varepsilon^k}.$$

Dacă notăm $\varepsilon=\frac{\alpha+\beta}{2}$ și aplicăm inegalitatea de mai înainte, rezultă

$$P(-\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta) \geqslant 1-\frac{M\left(\left|x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right|^k\right)}{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^k}.$$

În particular, dacă $k=2$ şi $M(\xi)=0$, atunci

$$M\left(\left|\xi-\frac{\beta-\alpha}{2}\right|^2\right)=\nu_2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 \text{ şi } P(-\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta)\geqslant 1-\frac{\nu_2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}.$$

Făcînd calculele în membrul al doilea, avem

$$P(-\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta)\geqslant\frac{4\alpha\beta-4\nu_2}{(\alpha+\beta)^2}.$$

22. Fie $y=H(x)$ o funcţie strict crescătoare, continuă, ξ o variabilă aleatoare, a cărei funcţie de repartiţie este $F(x)$. Să se arate că dacă pentru variabila $\eta=H(\xi)$ există valoarea medie, atunci

$$M(H(\xi))=\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\,\mathrm{d}F(x).$$

Soluţie. Să notăm cu $y=\overline{H}^{1}(x)$ inversa funcţiei $x=H(y)$.

$$P(H(\xi)<x)=F(\overline{H}^{1}(x)),$$

de unde rezultă că

$$M(H(\xi))=\int_{-\infty}^{\infty}x\,\mathrm{d}F(\overline{H}^{1}(x)).$$

Însă $y=\overline{H}^{1}(x)$ şi deci

$$M(H(\xi))=\int_{-\infty}^{\infty}H(y)\,\mathrm{d}F(y).$$

23. Fie $f(x)>0$ o funcţie descrescătoare. Să se demonstreze că dacă există $M(f(|\xi-M(\xi)|))$, atunci

$$P(|\xi-M(\xi)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{Mf(|\xi-M(\xi)|)}{f(\varepsilon)}.$$

Soluţie. Funcţia f fiind pozitivă şi $M(f)$ este de asemenea:

$$M(f(|\xi-M(\xi)|))=\int f(|x-M|)\,\mathrm{d}F(x).$$

Dacă notăm cu A, evenimentul

$$A=\{x;\ |\xi-M|\geqslant\varepsilon\},$$

atunci

$$M(f(|\xi-M|))=\int_A f(|x-M|)\,dF(x)+\int_{CA} f(|x-M|)\,dF(x).$$

Funcția f fiind crescătoare pe mulțimea A, are valoarea minimă $f(\varepsilon)$ și

$$M(f(|\xi-M|))\geqslant\int_A f(|x-M|)\,dF(x)\geqslant f(\varepsilon)\int_A dF(x)$$

sau $M(f(|\xi-M|))\geqslant f(\varepsilon)\cdot P(A)$, de unde rezultă inegalitatea cerută.

24. Dacă $F(x)$ este funcția de repartiție a variabilei aleatoare ξ și $M(\xi)$ există, atunci avem:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x(1-F(x))=0$

și

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xF(x)=0.$

Soluție. Dacă $M(\xi)$ există, atunci există și integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,dF(x);$$

pentru $x>0$, avem

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{\infty}|u|\,dF(u)=0 \quad \text{și} \quad \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x}|u|\,dF(u)=0.$$

Deci dacă $x\geqslant 0$, atunci

$$0\leqslant x(1-F(x))=x\int_x^{\infty}dF(u)\leqslant\int_x^{\infty}u\cdot dF(u),$$

de unde se vede că atunci cînd $x\to\infty$, avem

$$\lim_{x\to\infty} x(1-F(x))=0.$$

Analog, dacă $x<0$,

$$|x|F(x)=|x|\int_{-\infty}^{x}dF(u)\leqslant\int_{-\infty}^{x}|u|\,dF(u)$$

și deci

$$\lim_{x\to-\infty} xF(x)=0.$$

25. Dacă $F(x)$ este funcția de repartiție a variabilei aleatoare ξ și dacă $M(\xi)$ există, atunci

$$M(\xi)=\int_0^{\infty}(1-F(u))\,du-\int_{-\infty}^{0}F(u)\,du.$$

Soluție. Dacă $x>0$, atunci, aplicînd formula de integrare prin părți în integrala Stieltjes și apoi scăzînd și adunînd pe x, obținem

$$\int_0^x u\,dF(u)=-x(1-F(x))+\int_0^x(1-F(u))\,du;$$

analog,

$$\int_{-x}^{0}u\,dF(u)=xF(-x)-\int_{-x}^{0}F(u)\,du.$$

Știind din exercițiul precedent că

$$\lim_{x\to\infty}x(1-F(x))=0 \quad \text{și} \quad \lim_{x\to-\infty}x\cdot F(x)=0,$$

obținem

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x u\,dF(u)=\int_0^{\infty}u\,dF(u)=\lim_{x\to-\infty}\int_0^x(1-F(u))\,du=\int_0^{\infty}(1-F(u))\,du$$

și

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{0}u\,dF(u)=\int_{-\infty}^{0}u\,dF(u)=-\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{0}F(u)\,du=-\int_{-\infty}^{0}F(u)\,du.$$

Prin adunare rezultă că

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}u\,dF(u)=\int_0^{\infty}(1-F(u))\,du-\int_{-\infty}^{0}F(u)\,du.$$

26. O funcție de repartiție $F(x)$ are derivate în toate punctele de continuitate și pentru j dat există $k>j+1$, astfel ca

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)\cdot x^k=0, \quad \lim_{x\to+\infty}(1-F(x))\,x^k=0.$$

Notînd

$$M_j(a)=\int_a^{\infty}(x-a)^j\{1-F(x)\}\,dx-\int_{-\infty}^{a}(x-a)^j F(x)\,dx,$$

să se arate că

$$M_j(a) = \frac{1}{j+1}\mu'_{j+1}(a),$$

unde $\mu'_{j+1}(a)$ este momentul de ordinul $j+1$, centrat în a.

Soluție. Integrînd prin părți, avem

$$M_j(a) = \frac{(x-a)^{j+1}}{j+1}\{1-F(x)\}\Big|_a^{+\infty} + \int_a^{\infty}\frac{(x-a)^{j+1}}{j+1}F'(x)\,dx -$$

$$-\frac{(x-a)^{j+1}}{j+1}\cdot F(x)\Big|_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{x}\frac{(x-a)^{j+1}}{j+1}F'(x)\,dx.$$

Folosind condițiile de mai sus, rezultă că primul și al treilea termen sînt nuli. Deci

$$M_j(a) = \frac{1}{j+1}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^{j+1}dF(x)$$

sau notînd momentul cu $\mu'_{j+1}(a)$,

$$M_j(a) = \frac{1}{j+1}\mu'_{j+1}(a).$$

27. Să se arate că pentru o densitate de repartiție $\rho(x)$ nedescrescătoare pe intervalul $[a, b]$, avem

$$\int_a^b x^{2s}\rho(x)\,dx \leqslant \frac{b^{2s+1}-a^{2s+1}}{(2s+1)(b-a)}\int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Soluție. Inegalitatea se poate stabili direct, dacă ținem seamă de formula a doua de medie de la integrala Riemann:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_x^b f(t)\,dt \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

unde g este o funcție nedescrescătoare și f este pozitivă.

Să descompunem integrala din primul membru în suma

$$\int_a^b x^{2s}g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} x^{2s}\rho(x)\,dx$$

şi pe fiecare interval $\left[a+k\frac{b-a}{n},\ a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]$ să aplicăm formula a doua de medie. Obţinem:

$$\int_a^b x^{2s} g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right) \int_{x_k}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} x^{2s}dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right) \cdot \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} x^{2s}\,dx.$$

Cum primul membru nu depinde de n, inegalitatea se păstrează dacă trecem la limită pentru $n\to\infty$; atunci

$$\int_a^b x^{2s} g(x)\,dx \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b x^{2s}dx \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right).$$

Funcţia ρ fiind crescătoare,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b \rho(x)\,dx;$$

din ultimele două relaţii se obţine inegalitatea cerută.

Observaţie. Inegalitatea din enunţ se păstrează, dacă $0 \leqslant a < b$, şi pentru puterile impare ale lui x.

28. Folosind rezultatul din exerciţiul precedent să se arate că dacă $\rho(x)$ este o densitate continuă pe $[-a, a]$ şi simetrică faţă de $x=0$, atunci

a) $\mu_{2s} < \frac{a^{2s}}{2s+1}$, $s \geqslant 1$,

dacă ρ are un singur maxim în $x=0$.

b) $\mu_{2s} > \frac{a^{2s}}{2s+1}$, $s \geqslant 1$,

dacă g are un singur minim în $x=0$.

Soluţie. Ştiind că $\rho(x)$ este simetrică faţă de axa Oy, avem

$$\mu_{2s} = \int_{-a}^{a} x^{2s} \cdot \rho(x)\,dx = 2\int_0^a x^{2s} \cdot \rho(x)\,dx.$$

a) Dacă în $x=0$, $\rho(x)$ are un maxim, atunci pe $[0, a]$ ρ este descrescătoare şi

$$\int_0^a x^{2s}\rho(x)\,dx \leqslant \frac{a^{2s+1}}{(2s+1)\cdot a}\int_0^a \rho(x)\,dx$$

sau

$$\mu_{2s} \leqslant \frac{a^{2s}}{2s+1}\cdot 2\int_0^a \rho(x)\,dx \leqslant \frac{a^{2s}}{2s+1}\int_{-a}^a \rho(x)\,dx \leqslant \frac{a^{2s}}{2s+1}.$$

b) Dacă în $x=0$, $\rho(x)$ are un minim, atunci pe $[0, a]$ ρ este crescătoare şi

$$\mu_{2s} > \frac{a^{2s}}{2s+1}.$$

În ambele cazuri avem

$$\int_{-a}^a \rho(x)\,dx = 1.$$

29. Pentru o densitate de repartiţie $f(x)$, simetrică faţă de $x=0$, cu masă numai pe segmentul $[-a, a]$ şi cu funcţia de repartiţie $F(x)$, să se arate că

$$\mu_{2r} \leqslant 2a^{2r} - 2a^{2r-1}\int_0^a F(x)\,dx.$$

Soluţie. Prin definiţie

$$\mu_{2r} = \int_{-a}^a x^{2r} f(x)\,dx.$$

Funcţia $f(x)$ fiind simetrică, avem

$$\mu_{2r} = 2\int_0^a x^{2r} f(x)\,dx.$$

Integrînd prin părţi, obţinem

$$\mu_{2r} = 2a^{2r}F(a) - 2\int_0^a 2r\cdot x^{2r-1}F(x)\,dx.$$

Folosind observaţia de la exerciţiul anterior rezultă:

$$\mu_{2r} \leqslant 2a^{2r}F(a) - 2\cdot\frac{a^{2r}}{a}\cdot\int_0^a F(x)\,dx.$$

Cum $F(a)=1$, avem

$$\mu_{2r}\leqslant 2a^{2r}-2a^{2r-1}\int_0^a F(x)\,dx.$$

30. Fie

$$\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Știind că polinoamele lui Cebîșev-Hermite sînt definite prin

$$(-D)^r\alpha(x)=H_r(x)\cdot\alpha(x),$$

unde $D=\frac{d}{dx}$ și $D^r=\frac{d^r}{dx^r}$. Se cere:

a) Să se scrie H_1, H_2, ..., H_6.

b) Să se arate că

$$H_r(x)-xH_{r-1}(x)+(r-1)H_{r-2}(x)=0.$$

c) Să se arate că

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)\cdot\alpha(x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{dacă } m\neq n\\ n!, & \text{dacă } m=n.\end{cases}$$

Soluție. a) Prin convenție se ia $H_0=1$. Să punem

$$\alpha(x-t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+tx-\frac{t^2}{2}\right)=\alpha(x)\exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right).$$

Desvoltînd în serie Taylor, avem

$$\alpha(x-t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}t^jD^j(\alpha(x))=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}H_j(x)\cdot\alpha(x).$$

Rezultă că $H_r(x)$ este coeficientul lui $\frac{t^r}{r!}$ din dezvoltarea lui $\exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right)$, deci

$$H_r(x)=x^r-\frac{r^{[2]}}{2\cdot1!}x^{r-2}+\frac{r^{[4]}}{2^2\cdot2!}x^{r-4}-\frac{r^{[6]}}{2^3\cdot3!}x^{r-6}+\ldots,$$

unde $r^{[k]}=r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)$.

Rezultă:

$H_1=x$, $H_4=x^4-6x+3$,

$H_2=x^2-1$, $H_5=x^5-10x^3+15x$,

$H_3=x^3-3x$, $H_6=x^6-15x^4+45x^2-15$.

b) Diferențiind identitatea

$$\exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}H_j(x)$$

în raport cu x și identificînd coeficienții lui t^r, avem

$$\frac{d}{dx}H_r(x)=rH_{r-1}(x). \tag{1}$$

În general, avem

$$D^jH_r(x)=r^{[j]}H_{r-j}(x).$$

Diferențiind, în raport cu t, aceeași identitate și identificînd coeficienții lui t^{r-1}, obținem

$$H_r(x)-xH_{r-1}(x)+(r-1)H_{r-2}(x)=0. \tag{2}$$

Din (1) și (2) deducem

$$\frac{d^2H_r(x)}{dx^2}-x\frac{dH_r(x)}{dx}+rH_r(x)=0,$$

deoarece

$$H_{r-1}(x)=\frac{1}{r}\frac{dH_r(x)}{dx},\quad H_{r-2}(x)=\frac{1}{r(r-1)}\frac{d^2H_2(x)}{dx^2}.$$

c) Integrînd prin părți, pentru $m\leqslant n$, avem

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n^*(x)\cdot\alpha(x)\,dx=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)D^n\alpha(x)\,dx=$$

$$=(-1)^n[H_mD^{n-1}\cdot\alpha(x)]_{-\infty}^{\infty}+(-1)^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dH_m}{dx}\cdot D^{n-1}\cdot\alpha(x)\,dx.$$

Ținînd seama de (1), integrala de mai sus poate fi scrisă

$$m(-1)^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}H_{m-1}D^{n-1}\alpha(x)\,dx.$$

Continuînd cu aceeași metodă de integrare, se obține rezultatul cerut.

31. Să se exprime momentele factoriale ale distribuției binomiale prin momentele ordinare și reciproc.

Soluție. Să notăm cu $M_{(p)}$ momentul factorial de ordinul p al distribuției $F(x)$, care este definit prin egalitatea

$$M_{(p)}=\int_{-\infty}^{\infty}(x)_p\,\mathrm{d}F(x),$$

unde $(x)_p=x(x-1)\ldots(x-p+1)$.

Dăm mai departe relațiile care exprimă momentul factorial $M_{(p)}$ prin momentele ordinare M_k $(k=1, 2, \ldots, p)$ și reciproc, momentul ordinar M_p prin momentele factoriale $M_{(k)}$ $(k=1, \ldots, p)$. Aceste reprezentări au drept coeficienți numerele lui Stirling

$$S_p^k \quad \text{și} \quad T_p^k:$$

$$M_{(p)}=\sum_{k=1}^{p} M_k\cdot S_p^k; \quad M_p=\sum_{k=1}^{p} M_{(k)}\,T_p^k,$$

unde $S_p^k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^k(x)_p}{\mathrm{d}x^k}\right)_{x=0}$, iar $T_p^k=\frac{1}{k!}[\Delta^k x^p]_{x=0}$.

Din cele de mai sus rezultă că $M_{(1)}=S_1^1\cdot M_1$; însă știm că $M_1=np$, iar $S_1^1=\frac{1}{1!}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}=1$, de unde rezultă că

$$M_{(1)}=np.$$

Analog,

$$M_{(2)}=S_2^1M_1+S_2^2M_2,$$

unde

$$M_1=np, \quad M_2=n^2p^2+npq,$$

ar

$$S_2^1=\frac{1}{1!}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x(x-1)\right]_{x=0}=-1, \quad S_2^2=\frac{1}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x(x-1)\right]_{x=0}=1;$$

deci

$$M_{(2)}=-M_1+M_2=n(n-1)p^2.$$

Pentru a calcula momentele ordinare, cunoscînd momentele factoriale, folosim relația

$$M_1=T_1^1M_{(1)}.$$

Însă,

$$M_{(1)}=np, \quad T_1^1=\frac{1}{1!}[\Delta^1 x]_{x=0}=1.$$

Deci

$$M_1=np.$$

Analog,

$$M_2 = T_2^1 M_{(1)} + T_2^2 M_{(2)},$$

unde

$$M_{(n)} = np, \qquad T_2^1 = \frac{1}{1!}[\Delta x^2]_{x=0} = 1,$$

$$M_{(2)} = n(n-1)p^2, \quad T_2^2 = \frac{1}{2!}[\Delta^2 x^2]_{x=0} = 1.$$

Deci

$$M_2 = n^2p^2 + npq.$$

32. Să se scrie momentele factoriale de ordinul întîi şi al doilea ale distribuţiei Poisson, cunoscînd momentele ordinare.

Soluţie. Am arătat mai înainte că

$$M_1 = a, \quad M_2 = a^2 + a.$$

Momentele factoriale sînt date de:

$$M_{(1)} = S_1 M_1 = M_1 = a, \quad M_{(2)} = S_2^1 M_1 + S_2^2 M_2 = -M_1 + M_2 = a^2.$$

33. Să se scrie momentele factoriale de primele două ordine ale distribuţiei normale, cunoscînd momentele ordinare şi reciproc.

Soluţie. Ştim că:

$$M_1 = m, \quad M_2 = \sigma^2 + m^2.$$

Deci

$$M_{(1)} = S_1 M_1 = M_1 = m,$$

$$M_{(2)} = S_2^1 M_1 + S_2^2 M_2 = -M_1 + M_2 = \sigma^2 + m^2 - m.$$

Însă

$$M_1 = T_1^1 M_{(1)} = M_{(1)} = m.$$

$$M_2 = T_2^1 M_{(1)} + T_2^2 M_{(2)} = M_{(1)} + M_{(2)} = \sigma^2 + m^2.$$

34. Să considerăm o urnă care conţine s bile, dintre care sp bile albe şi sq bile negre ($sp + sq = s$). Probabilitatea de a extrage h ($h = 0,1, \ldots, n$) bile albe în n extracţii, fără a pune bila înapoi, este dată de egalitatea

$$P_h = \frac{C_{sp}^h C_{sq}^{n-h}}{C_s^n}.$$

Se cere:

a) Să se calculeze momentele factoriale.

b) Să se calculeze momentele de ordinul întîi, de ordinul al doilea și dispersia.

c) Să se calculeze momentele centrate.

Soluție. a) Să observăm că

$$(1+t)^s=(1+t)^{sp}(1+t)^{sq}.$$

De aici deducem că

$$\sum_{n=0}^{s} C_s^n t^n=\sum_{h=0}^{sp} C_{sp}^h t^h \cdot \sum_{j=0}^{sq} C_{sq}^j t^j=\sum_{n=0}^{s} t^n \cdot \sum_{h=0}^{n} C_{sp}^h C_{sq}^{n-h}.$$

Să notăm cu f_k momentele factoriale. Din definiție rezultă că

$$f_k=\sum_{h=0}^{n} h(h-1)\ldots(h-k+1)P_h.$$

Ținînd seama de cele spuse anterior, deducem următoarea identitate

$$(1+t)^{sp}\cdot(1+\theta)^{sq}=\sum_{h=0}^{sp} C_{sp}^h t^h \sum_{j=0}^{sq} C_{sq}^j \theta^j.$$

Dacă derivăm egalitatea de mai sus de k ori ($k<sp$), în raport cu t, și punem apoi $\theta=t$, obținem

$$sp(sp-1)\ldots(sp-k+1)(1+t)^{sp-k}(1+t)^{sq}=$$

$$=\sum_{h=0}^{sp} h(h-1)\ldots(h-k+1)\cdot C_{sp}^h t^{h-k} \sum_{j=0}^{sq} C_{sq}^j t^j,$$

de unde

$$sp(sp-1)\ldots(sp-k+1)(1+t)^{s-k}=$$

$$=\sum_{n=k}^{s} t^{n-k} \sum_{h=0}^{n} h(j-1)\ldots(h-k+1)C_{sp}^h \cdot C_{sq}^{n-h}=$$

$$=sp(sp-1)\ldots(h-k+1)\sum_{n=k}^{s} C_{s-k}^{n-k}\cdot t^{n-k};$$

deci

$$\sum_{h=0}^{n} h(h-1)\ldots(h-k+1)C_{sp}^h C_{sq}^{n-h}=sp(sp-1)\ldots(sp-k+1)C_{s-k}^{n-k}.$$

Deducem, însfîrșit, că momentele factoriale sînt date de

$$f_k=sp(sp-1)\ldots(sp-k+1)\cdot C_{s-k}^{n-k}/C_s^n.$$

b) Pentru a calcula momentele distribuției date, să pornim de la egalitatea

$$(1+e^t)^{sp}(1+e^\theta)^{sq}=\sum_{h=0}^{sp}C_{sp}^h e^{ht}\sum_{j=0}^{sq}C_{sq}^j e^{j\theta},$$

pe care derivînd-o de k ori, obținem

$$(1+e^t)^{sp}D^k(1+e^t)^{sq}=\sum_{n=0}^{s}e^{nt}\sum_{h=0}^{n}C_{sp}^h C_{sq}^{n-h}h^k$$

sau

$$\sum_{n=0}^{s}e^{nt}\sum_{h=0}^{n}C_{sp}^h C_{sq}^{n-h}h^k=\sum_{n=0}^{s}M_n^{(k)}e^{nt},$$

unde am notat cu $M_n^{(k)}$ a doua sumă din membrul întîi.

De aici rezultă că momentele sînt date de relațiile:

$$M_k=\frac{M_n^{(k)}}{C_s^n}.$$

Pentru a calcula momentele de primele două ordine, să observăm că

$$(1+e^t)^{sq}D(1+e^t)^{sp}=sp(1+e^t)^{s-1}e^t=sp\sum_{n=0}^{s}C_{s-1}^{n-1}e^{nt}$$

și că

$$(1+e^t)^{sq}D^2(1+e^t)^{sp}=sp(sp-1)(1+e^t)^{s-2}e^{2t}+sp(1+e^t)^{s-1}e^t=$$

$$=\sum_{n=0}^{s}[sp(sp-1)C_{s-2}^{n-2}+spC_{s-1}^{n-s}]e^{nt}.$$

De unde rezultă imediat că

$$M_n^{(1)}=spC_{s-1}^{n-1},\quad M_n^{(2)}=sp(sp-1)C_{s-2}^{n-2}+spC_{s-1}^{n-1}$$

și deci

$$M_1=sp\frac{C_{s-1}^{n-1}}{C_s^n}=np$$

și

$$M_2=sp(sp-1)\frac{C_{s-2}^{n-2}}{C_s^n}+sp\frac{C_{s-1}^{n-1}}{s(s-1)}n(n-1)+np.$$

Dispersia este dată de

$$D^2=M_2-M_1^2=\frac{s-n}{s-1}npq.$$

c) Pentru a calcula momentele centrate, să pornim de la identitatea:

$$(1+2^t)^{sp}(1+e^\theta)^{sq}=\sum_{h=0}^{sp}C_{sp}^h e^{ht}\cdot\sum_{j=0}^{sq}C_{sq}^j e^{j\theta}.$$

Înmulțind ambii membri ai egalității cu e^{-npt}, derivînd apoi de k ori în raport cu t și punînd $\theta=t$, obținem

$$(1+e^t)^{sq}D^k[(1+e^t)^{sp}e^{-npt}]=\sum_{h=0}^{sp}C_{sp}^h(h-np)^k e^{(h-np)t}\times\sum_{j=0}^{sq}C_{sq}^j e^{jt}$$

sau

$$\sum_{v=0}^{s}e^{(v-np)t}\sum_{h=0}^{n}C_{sp}^h C_{sq}^{v-h}(h-np)^k=(1+e^t)^{sq}D^k\left(e^{-\frac{n}{s}t}+e^{\frac{s-n}{s}t}\right)^{sp}=$$

$$=\sum_{v=0}^{s}L_v^{(k)}e^{(v-np)t},$$

unde expresiile $L_v^{(k)}$ sînt calculate analog cu $M_n^{(k)}$. De aici rezultă că momentele centrate sînt

$$\mu_k=\frac{L_n^{(k)}}{C_s^n}.$$

Pentru a afla primele două momente centrate, să calculăm mai întîi următoarele:

$$(1+e^t)^{sq}D\left(e^{-\frac{n}{s}t}+e^{\frac{s-n}{s}t}\right)^{sp}=(1+e^t)^{sp}sp\left(e^{-\frac{n}{s}t}+e^{\frac{s-n}{s}t}\right)^{sp-1}-$$

$$-\left(-\frac{n}{s}e^{-\frac{n}{s}t}+\frac{s-n}{s}e^{\frac{s-n}{s}t}\right)=(1+e^t)^{s-1}[-npe^{-npt}+(s-n)pe^{(1-np)t}]=$$

$$=\sum_{v=0}^{s}[-npC_{s-1}^v+(s-n)pC_{s-1}^{v-1}]e^{(v-np)t}$$

și, analog,

$$(1+e^t)^{sq}D^2\left(e^{-\frac{n}{s}t}+e^{\frac{s-n}{s}t}\right)^{sp}=(1+e^t)^{sq}[sp(sp-1)\times$$

$$\times\left(e^{-\frac{n}{s}t}+e^{\frac{s-n}{s}t}\right)^{sp-2}\cdot\left(-\frac{n}{s}e^{-\frac{n}{s}t}+\frac{s-n}{s}e^{\frac{s-n}{s}t}\right)^2+$$

$$+sp\left(e^{-\frac{n}{s}t}+e^{\frac{s-n}{n}t}\right)^{sp-1}\cdot\left(\frac{n^2}{s^2}e^{-\frac{n}{s}t}+\frac{(s-n)^2}{s^2}\cdot e^{\frac{s-n}{s}t}\right)]=$$

$$=\sum_{v=0}^{s}sp(sp-1)\left[\left(\frac{n^2}{s^2}C_{s-2}^v-2\frac{n}{s}\frac{s-n}{s}C_{s-2}^{v-1}+\frac{(s-n)^2}{s^2}C_{s-2}^{v-2}\right)+\right.$$

$$\left.+sp\left(\frac{n^2}{s^2}C_{s-1}^v+\frac{(s-n)^2}{s^2}C_{s-1}^{v-1}\right)\right]e^{(v-np)t};$$

de unde

$$L_v^{(1)} = -np\,C_{s-1}^{v} + (s-n)\,p \cdot C_{s-1}^{v-1}$$

şi

$$L_v^{(2)} = sp\,(sp-1)\left(\frac{n^2}{s^2}\,C_{s-2}^{v} - 2\,\frac{n}{s}\,\frac{s-n}{s}\,C_{s-2}^{v-1} + \frac{(s-n)^2}{s^2}\,C_{s-2}^{v-2}\right) +$$

$$+ sp\left(\frac{n^2}{s^2}\,C_{s-1}^{v} + \frac{(s-n)^2}{s^2}\,C_{s-1}^{v-1}\right).$$

In particular,

$$L_n^{(1)} = 0 \quad \text{şi} \quad L_n^{(2)} = \frac{s-n}{s-1}\,npq\,C_s^n$$

şi deci

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{s-n}{s-1}\,C_s^n\,npq.$$

35. Se dă probabilitatea [1])

$$f(h) = C_n^h \frac{R(R+\Delta)\dots[(R+h-1)\Delta]\,S(S+\Delta)]\dots[S+(n-h+1)\Delta]}{N(N+\Delta)\dots(N+(n-1)\Delta)}$$

care se mai poate scrie

$$f(h) = \frac{C_{-R/\Delta}^{h}\,C_{-S/\Delta}^{n-h}}{C_{-N/\Delta}^{n}}.$$

Aşa se determină probabilitatea de a extrage în n probe h bile roşii şi $n-h$ negre, într-o ordine oarecare.

Aceasta este *legea de distribuţie a lui Pólya*. Se cere să se calculeze momentele acestei distribuţii.

Soluţie. Vom aplica *metoda lui Romanovski*. Să notăm momentele factoriale

$$\sigma_{(k)} = M(h\,(h-1)\dots(h-k+1))$$

şi momentele în raport cu originea, respectiv:

$$\sigma_k = M(h^k), \quad m_k = M((h-\sigma_1)^k).$$

Să considerăm identitatea

$$(1+t)^{-\frac{R}{\Delta}} \cdot (1+\theta)^{-\frac{S}{\Delta}} = \sum_{h=0}^{\infty} C_{-\frac{R}{\Delta}}^{h}\,t^h \cdot \sum_{g=0}^{\infty} C_{-\frac{S}{\Delta}}^{g}\,\theta^g$$

$$(|t|<1,\ |\theta|<1);$$

[1]) Vezi [18].

derivînd în ambii membri de k ori în raport cu t şi apoi punînd $\theta=t$, obţinem

$$\left(-\frac{R}{\Delta}\right)\left(-\frac{R}{\Delta}-1\right)\ldots\left(-\frac{R}{\Delta}-k+1\right)(1+t)^{-\frac{N}{\Delta}-k}=$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}h(h-1)\ldots(h-k+1)\,C^{h}_{-\frac{R}{\Delta}}\,t^{h-k}\sum_{g=0}^{\infty}C^{g}_{-\frac{S}{\Delta}}\,t^{g}=$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}t^{n-k}\sum_{h=0}^{n}h(h-1)\ldots(h-k+1)\,C^{h}_{-\frac{R}{\Delta}}\,C^{n-h}_{-\frac{S}{\Delta}}$$

sau încă

$$\left(-\frac{R}{\Delta}\right)\left(-\frac{R}{\Delta}-1\right)\ldots\left(-\frac{R}{\Delta}-k+1\right)\sum_{n=k}^{\infty}C^{n-k}_{-\frac{N}{\Delta}-k}\,t^{n-k}=$$

$$=\sum_{h=k}^{\infty}t^{n-k}\sum_{h=0}^{n}h(h-1)\ldots(h-k+1)\,C^{h}_{-\frac{R}{\Delta}}\,C^{n-h}_{-\frac{S}{\Delta}}.$$

De unde

$$\sum_{h=0}^{n}h(h-1)\ldots(h-k+1)\,C^{h}_{-\frac{R}{\Delta}}\,C^{n-h}_{-\frac{S}{\Delta}}=$$

$$=\left(-\frac{R}{\Delta}\right)\left(-\frac{R}{\Delta}-1\right)\ldots\left(-\frac{R}{\Delta}-k+1\right)C^{n-k}_{-\frac{N}{\Delta}-k}$$

sau

$$\sigma_{(k)}=\left(-\frac{R}{\Delta}\right)\left(-\frac{R}{\Delta}-1\right)\ldots\left(-\frac{R}{\Delta}-k+1\right)\frac{C^{n-k}_{-\frac{N}{\Delta}-k}}{C^{n}_{-\frac{N}{\Delta}}}$$

sau încă

$$\sigma_{(k)}=\frac{R(R+\Delta)\ldots[R+(k-1)\Delta]}{N(N+\Delta)\ldots[N+(K-1)\Delta]}\,n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Pentru celelalte momente avem

$$(1+e^{t})^{-\frac{R}{\Delta}}(1+e^{\theta})^{-\frac{S}{\Delta}}=\sum_{h=0}^{\infty}C^{h}_{-\frac{R}{\Delta}}\,e^{ht}\sum_{g=0}^{\infty}C^{g}_{-\frac{S}{\Delta}}\,e^{g\theta}\qquad(e^{t}<e^{\theta}<1)$$

derivînd de k ori în raport cu t şi apoi punînd $\theta=t$, avem

$$(1+e^{t})^{-\frac{S}{\Delta}}\frac{\partial^{k}}{\partial t^{k}}(1+e^{t})^{-\frac{R}{\Delta}}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{nt}\sum_{h=0}^{n}C^{h}_{-\frac{R}{\Delta}}\,C^{n-h}_{-\frac{S}{\Delta}}\,h^{k}$$

sau încă

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} \sum_{h=0}^{n} C_{-\frac{R}{\Delta}}^{h} C_{-\frac{S}{\Delta}}^{n-h} h^k = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(k)} e^{nt},$$

unde $M_n^{(k)}$ este coeficientul lui e^{nt} după dezvoltarea expresiei

$$(1+e^t)^{-\frac{S}{\Delta}} \frac{\partial^k}{\partial t^k} (1+e^t)^{-\frac{R}{\Delta}}.$$

Ca exemplu să determinăm σ_1 şi σ_2. Avem:

$$(1+e^t)^{-\frac{S}{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} (1+e^t)^{-\frac{R}{\Delta}} = \left(-\frac{R}{\Delta}\right)(1+e^t)^{-\frac{N}{\Delta}-1} e^t =$$

$$= \left(-\frac{R}{\Delta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_{-\frac{N}{\Delta}-1}^{n-1} e^{nt}.$$

$$(1+e^t)^{-\frac{S}{\Delta}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (1+e^t)^{-\frac{R}{\Delta}} = \left(-\frac{R}{\Delta}\right)\left(-\frac{R}{\Delta}-1\right)(1+e^t)^{-\frac{N}{\Delta}-2} e^{2t} +$$

$$+ \left(-\frac{R}{\Delta}\right)(1+e^t)^{-\frac{N}{\Delta}-1} e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(-\frac{R}{\Delta}\right)\left(-\frac{R}{\Delta}-1\right) C_{-\frac{N}{\Delta}-2}^{n-2} + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{R}{\Delta}\right) C_{-\frac{N}{\Delta}-1}^{n-1}\right] e^{nt},$$

de unde

$$M_n^{(1)} = \left(-\frac{R}{\Delta}\right) C_{-\frac{N}{\Delta}-1}^{n-1}$$

$$M_n^{(2)} = \left(-\frac{R}{\Delta}\right)\left(-\frac{R}{\Delta}-1\right) C_{-\frac{N}{\Delta}-2}^{n-2} + \left(-\frac{R}{\Delta}\right) C_{-\frac{N}{\Delta}-1}^{n-1}.$$

Avem, deci,

$$\sigma_1 = \left(-\frac{R}{\Delta}\right) \frac{C_{-\frac{N}{\Delta}-1}^{n-1}}{C_{-\frac{N}{\Delta}}^{n}} = \frac{R}{\Delta} \cdot \frac{n}{\frac{N}{\Delta}} = n \cdot \frac{R}{N},$$

$$\sigma_2 = \left(-\frac{R}{\Delta}\right)\left(-\frac{R}{\Delta}-1\right) \frac{C_{-\frac{N}{\Delta}-2}^{n-2}}{C_{-\frac{N}{\Delta}}^{n}} + \left(-\frac{R}{\Delta}\right) \frac{C_{-\frac{N}{\Delta}-1}^{n-1}}{C_{-\frac{N}{\Delta}}^{n}} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{N(N+\Delta)} (R+\Delta) R + n \frac{R}{N}$$

sau

$$\sigma_2 = nR\,\frac{(R+\Delta)\,n+S}{N(N+\Delta)}\,.$$

36. Să se calculeze, cu ajutorul funcţiei generatoare a momentelor, momentele distribuţiei gamma.

Soluţie. Densitatea de repartiţie este

$$\rho(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)\,\beta^{\alpha+1}}\cdot x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{pentru } x>0\\ 0 & \text{pentru } x\leqslant 0\end{cases},$$

unde $\alpha>-1$ şi $\beta>0$.

Prin definiţie, avem

$$m(t)=\int_0^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\,\beta^{\alpha+1}}\,x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx.$$

Făcînd substituţia $y=\frac{x}{\beta}$, obţinem

$$m(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{\infty} e^{\beta t y}y^{\alpha}e^{-y}dy$$

sau

$$m(t)=\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{\infty}(1-\beta t)^{\alpha+1}e^{-y(1-\beta t)}y^{\alpha}dy=$$

$$=\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha+1}}e^{-\frac{y}{\frac{1}{1-\beta t}}}y^{\alpha}dy.$$

Notînd $\beta_1=\frac{1}{1-\beta t}$, obţinem

$$m(t)=\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\beta_1^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{y}{\beta_1}}y^{\alpha}dy=\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}.$$

Dezvoltînd în serie de puteri, avem

$$m(t)=1+\frac{\beta(\alpha+1)}{1!}t+\frac{\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2)}{2!}t^2+\ldots$$

De aici rezultă că

$$M(\xi^r)=\beta^r(\alpha+1)(\alpha+2)+\ldots+(\alpha+r).$$

37. Să se calculeze momentele *distribuției Student*, a cărei densitate de repartiție este

$$\rho(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

Soluție. Avem

$$M_{2r+1}=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^{2r+1}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dt=0,$$

deoarece funcția $t^{2r+1}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$ este impară, iar

$$M_{2r}=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}t^{2r}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dt.$$

Făcînd substituția $\frac{t^2}{k}=x$, avem $2t\,dt=k\,dx$, $t=\sqrt{kx}$ și deci

$$M_{2r}=\frac{k^r\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}x^{r-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{k+1}{2}}dx$$

sau

$$M_{2r}=\frac{k^r\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\frac{2\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}=\frac{k^r}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},$$

deoarece

$$\int_0^{\infty}x^{p-1}(1+x)^{-(p+q)}dx=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

şi deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{r-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{k+1}{2}}\,dx = 2\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

Să observăm că momentul de ordinul $2r$ există numai dacă $r \leqslant \frac{k}{2}$.

Să scriem sub altă formă expresia lui M_{2r}. Pentru aceasta să observăm că:

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{k}{2}-r\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right),$$

$$\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right) = \left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right);$$

înlocuind în expresia lui M_{2r}, obţinem

$$M_{2r} = \frac{k^r}{\sqrt{\pi}}\frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right)}{\left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{k}{2}-r\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-r\right)} =$$

$$= \frac{k^r\cdot 1\cdot 3\ldots(2r-3)\cdot(2r-1)}{(k-2)(k-4)\ldots(k-2r)}.$$

De unde deducem că:

$$M_2 = \frac{k}{k-2},\quad M_4 = \frac{3k^2}{(k-2)(k-4)},\quad M_6 = \frac{15k^3}{(k-2)(k-4)(k-6)},$$

. . . . . .

38. Să se calculeze momentele repartiţiei F, a cărei densitate de repartiţie este

$$\rho(u) = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\cdot u^{\frac{k_1-2}{2}}\left(1+\frac{k_1}{k_2}u\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}.$$

Soluţie. Prin definiţie avem

$$M_r = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\int_0^{\infty} u^r u^{\frac{k_1-2}{2}}\left(1+\frac{k_1}{k_2}u\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}du.$$

Notînd $v=\frac{k_1}{k_2}$, obţinem

$$M_r=\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{r+\frac{k_1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\int_0^\infty v^{r+\frac{k_1}{2}-1}(1+v)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}\,dv=$$

$$=\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^r\frac{\Gamma\left(r+\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)},$$

deoarece

$$\int_0^\infty v^{r+\frac{k_2}{2}-1}(1+v)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}\,dv$$

este o integrală de tipul

$$\int_0^\infty x^p(1+x)^{-(p+q)}\,dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Să observăm că M_r există numai dacă $r<\frac{k_2}{2}$.

Dacă înlocuim

$$\Gamma\left(r+\frac{k_1}{2}\right)=\left(r+\frac{k_1}{2}-1\right)\left(r+\frac{k_1}{2}-2\right)\ldots\frac{k_1}{2}\,\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)=\left(\frac{k_2}{2}-1\right)\left(\frac{k_2}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{k_2}{2}-r\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}-r\right),$$

obţinem

$$M_r=\frac{k_2^r}{k_1^r}\cdot\frac{\left(r+\frac{k_1}{2}-1\right)\left(r+\frac{k_1}{2}-2\right)\ldots\frac{k_1}{2}}{\left(\frac{k_2}{2}-1\right)\left(\frac{k_2}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{k_2}{2}-r\right)}$$

sau

$$M_r=\frac{k_2^r}{k_1^r}\cdot\frac{k_1(k_1+r)\ldots(k_1+2r-2)}{(k_2-2)(k_2-4)\ldots(k_2-2r)}.$$

Primele momente ale distribuţiei F cu k_1 şi k_2 grade de libertate sînt:

$$M_1=\frac{k_2}{k_2-2},\quad M_2=\frac{k_2^2}{k_1}\cdot\frac{k_1+2}{(k_2-2)(k_2-4)},\quad M_3=\frac{k_2^3}{k_1^2}\cdot\frac{(k_1+2)(k_1+4)}{(k_2-2)(k_2-4)(k_2-6)},$$

. . . . . .

39. Fie ξ şi η două variabile aleatoare; să notăm cu $r_{\xi\eta}$ coeficientul de corelaţie al celor două variabile. Să se arată că

$$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)+2r_{\xi\eta}.$$

Soluţie. Să notăm cu $\beta=\xi+\eta$; atunci

$$M(\beta)=M(\xi)+M(\eta)$$

sau, introducînd notaţiile obişnuite,

$$m_\beta=m_\xi+m_\eta.$$

Din definiţia dispersiei rezultă

$$D(\xi+\eta)=D(\xi-m_\xi)^2+2M(\xi-m_\xi)(\eta-m_\eta)+M(\eta-m_\eta)^2=$$
$$=D(\xi)+2r_{\xi\eta}+D(\eta).$$

40. Fie

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i+b$$

o combinaţie liniară de variabile aleatoare, unde a_i şi b sînt constante. Să se arate că

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i+b\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2D(\xi_i)+2\sum_{i<j} a_ia_jr_{ij},$$

unde r_{ij} este corelaţia variabilelor aleatoare ξ_i şi ξ_j.

Soluţie. Să notăm $\beta_i=a_i\xi_i$; atunci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i+b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i+b.$$

Din definiţia dispersiei, rezultă că

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i+b\right)=\sum_{i=1}^{n} D(\beta_i)+2\sum_{i<j} r_{ij}^{(\beta)}=\sum_{i=1}^{n} a_i^2D(\xi_i)+2\sum_{i<j} r_{ij}^{(\beta)},$$

unde $r_{ij}^{(\beta)}$ este corelaţia variabilelor β_i şi β_j, adică

$$r_{ij}^{(\beta)}=M[(\beta_i-m_{\beta_i})(\beta_j-m_{\beta_j})]=M[a_ia_j(\xi_i-m_{\xi_i})(\xi_j-m_{\xi_j})]=a_ia_jr_{ij}$$

şi deci

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i+b\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2D(\xi_i)+2\sum_{i<j} a_ia_jr_{ij}.$$

41. Fie ξ şi η două variabile aleatoare, să se arate că:

a) $M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)\cdot M(\eta)+\gamma_{\xi\eta}$

b) $D(\xi\cdot\eta)=D(\xi)\cdot D(\eta)+m_\xi^2 D(\eta)+m_\eta^2 D(\xi)$.

Soluţie. a) Din definiţia corelaţiei avem:

$$\gamma_{\xi\eta}=M(\xi-m_\xi)(\eta-m_\eta)=M(\xi\cdot\eta(-m_\xi M(\eta)-m_\eta M(\xi)+m_\xi m_\eta=$$

$$=M(\xi\cdot\eta)-M(\xi)\cdot M(\eta),$$

de unde rezultă egalitatea cerută.

b) Să notăm cu $\beta=\xi\eta$; atunci

$$D(\xi\eta)=D(\beta)=M((\beta-m_\beta)^2);$$

cum însă $m_\beta=m_\xi\cdot m_\eta$, avem

$$D(\xi\eta)=M((\xi\eta-m_\xi m_\eta)^2)=M(\xi^2\eta^2)-2m_\xi m_\eta M(\xi\eta)+m_\xi^2 m_\eta^2\cdot$$

Însă $M(\xi^2\eta^2)=M(\xi^2)\cdot M(\eta^2)$ şi $M(\xi\eta)=m_\xi m_\eta$; deci

$$D(\xi\eta)=M(\xi^2)\cdot M(\eta^2)-m_\xi^2\cdot m_\eta^2.$$

Să observăm acum că

$$M(\xi^2)=D(\xi)+m_\xi^2, \quad \text{iar} \quad M(\eta^2)=D(\eta)+m_\eta^2;$$

prin urmare

$$D(\xi\eta)=D(\xi)\cdot D(\eta)+m_\xi^2 D(\eta)+m_\eta^2 D(\xi).$$

42. Să se calculeze:

a) valorile medii,

b) varianţele,

c) covarianţa,

corespunzătoare legii de repartiţie gaussiană cu două dimensiuni.

Soluţie. a) Vom nota $M(\xi^k,\eta^k)=m_{h,k}$. Prin definiţie avem

$$m_{10}=k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\varphi(x-\alpha,\,y-\beta)}\,dxdy,$$

unde $\varphi(x-\alpha,\,y-\beta)=a_{11}(x-\alpha)^2+2a_{12}(x-\alpha)(y-\beta)+a_{22}(y-\beta)^2$ este pozitiv definită. Făcînd schimbarea de variabilă

$$x-\alpha=x', \quad y-\beta=y'$$

şi ştiind că

$$1=k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varphi(x-\alpha,\ y-\beta)}\,dx\,dy,$$

rezultă

$$m_{10}=\alpha+k\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x'e^{-\varphi(x',y')}\,dx'dy'.$$

În ultima integrală să facem schimbarea de variabilă

$$x'=a_1\xi+b_1\eta,\quad y'=a_2\xi+b_2\eta$$

care reduce pe φ la forma canonică; avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x'e^{-\varphi(x',y')}\,dx'dy'=a_1\delta\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{-\xi^2}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta+$$

$$+b_1\delta\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\eta e^{-\eta^2}d\eta=0,$$

deoarece $\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}dx=0$ şi deci

$$m_{10}=\alpha.$$

Analog, vom obţine

$$m_{01}=\beta.$$

Punctul de coordonate (α, β) constituie centrul repartiţiei care este simetrică.

b) Vom presupune că $m_{10}=m_{01}=0$, deci că am adus centrul de coordonate în centrul de simetrie al repartiţiei în punctul (α, β).

Varianţele sînt

$$\mu_{20}^2=k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\varphi(x,y)}\,dx\,dy.$$

Făcînd schimbarea de variabile $(\alpha=\beta=0)$

$$x=a_1\xi+b_1\eta,$$

$$y=a_2\xi+b_2\eta,$$

obţinem

$$\mu_{20}^2=k\delta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(a_1\xi+b_1\eta)^2e^{-(\xi^2+\eta^2)}d\xi d\eta,$$

de unde rezultă uşor că

$$\mu_{20}^2 = \frac{1}{2}[a_1^2 + b_1^2].$$

Analog, vom obţine că

$$\mu_{02}^2 = \frac{1}{2}[a_2^2 + b_2^2].$$

c) Covarianţa este

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1\xi + b_1\eta)(a_2\xi + b_2\eta)\, e^{-(\xi^2+\eta^2)} d\xi d\eta$$

sau

$$\mu_{11} = \frac{1}{2}(a_1 a_2 + b_1 b_2).$$

43. Fie ξ şi η două variabile aleatoare, pentru care

$$M(\xi) = -?, \quad M(\eta) = 3,$$
$$D(\xi) = 4, \quad D(\eta) = 5,$$

iar coeficientul de corelaţie $r_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}$.

Se cere să se afle valoarea medie a variabilei aleatoare

$$\zeta = 2\xi^2 - \xi\eta + \eta^2 - 2.$$

Soluţie. Prin definiţie avem

$$M(\zeta) = 2M(\xi^2) - M(\xi\eta) + M(\eta^2) - 2.$$

Insă ştim că

$$D = M_2 - M_1^2 \quad \text{sau} \quad M_2 = D + M_1^2,$$

unde cu D am notat dispersia. Deci

$$M(\xi^2) = D(\xi) + (M_1(\xi))^2 = 4 + 4 = 8,$$
$$M(\eta^2) = D(\eta) + (M_1^2(\eta))^2 = 5 + 9 = 14,$$
$$M(\xi\eta) = M(\xi)\, M(\eta) + r_{\xi\eta} \cdot \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta,$$

unde $r_{\xi\eta}$ este corelaţia celor două variabile.

Se ştie că $r_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}$ şi deci $M(\xi\eta) = -6 - \frac{2\sqrt{5}}{2}$.

Rezultă că

$$M(\zeta)=16+6+\frac{2\sqrt{5}}{2}+14-2=34+\sqrt{5}.$$

44. Fie ξ şi η două variabile aleatoare care verifică relaţia $\xi\cdot\eta=1$. Să presupunem că variabila ξ ia trei valori $\frac{1}{N}$, 1 şi N (N număr natural $\geqslant 3$) cu probabilităţile $P\left(\xi=\frac{1}{N}\right)=P(\xi=N)=\frac{1}{(N-1)^2}$ şi $P(\xi=1)=1-\frac{2}{(N-1)^2}$.

Să se calculeze coeficientul de corelaţie dintre aceste variabile.

Soluţie. Să observăm că

$$\xi=\begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 1 & N \\ \frac{1}{(N-1)^2} & 1-\frac{2}{(N-1)^2} & \frac{1}{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

şi η ia aceleaşi valori cu aceleaşi probabilităţi.

Să calculăm mai întîi valorile medii. Avem

$$M(\xi)=m_\xi=1\cdot\left(1-\frac{2}{(N-1)^2}\right)+\frac{1}{(N-1)^2}\left(\frac{1}{N}+N\right)=1+\frac{(N-1)^2}{N(N-1)^2},$$

deci

$$M(\xi)=1+\frac{1}{N}.$$

Pentru dispersie avem

$$D(\xi)=1^2\cdot\left(1-\frac{2}{(N-1)^2}\right)+\frac{1}{N^2}\cdot\frac{1}{(N-1)^2}+\frac{N^2}{(N-1)^2}-m_\xi^2=1.$$

Analog, rezultă că

$$m_\eta=1+\frac{1}{N} \quad \text{şi} \quad D(\eta)=1.$$

În sfîrşit,

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M(\xi,\eta)-m_\xi\cdot m_\eta=1\cdot 1\cdot\left(1-\frac{2}{(N-1)^2}\right)+$$

$$+2\cdot N\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{(N-1)^2}-\left(1+\frac{1}{N}\right)^2=-\frac{1}{N^2}-\frac{2}{N}$$

sau

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 1 - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2.$$

Coeficientul de corelație este dat de

$$\rho_{(\xi, \eta)} = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D(\xi)} \cdot \sqrt{D(\eta)}} = 1 - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2$$

sau

$$\rho_{(\xi, \eta)} = -\frac{2N+1}{N^2}.$$

45. Să se arate că dacă abaterile sînt mici în raport cu valoarea medie, avem pentru mediile geometrice și armonice valorile aproximative:

$$G = m\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{m^2}\right), \quad H = m\left(1 - \frac{\sigma^2}{m^2}\right)$$

și deci

$$m - 2G + H = 0.$$

Soluție. Pentru media geometrică vom folosi formula

$$G = e^{\int_0^{+\infty} \ln x \cdot dF(x)},$$

iar pentru cea armonică

$$H = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dF(x)}$$

în cazurile cînd integralele există.

Afirmația că abaterile sînt mici vom transpune-o neglijînd integralele de forma

$$\int (x-m)^p\, dF(x), \quad \text{cu} \quad p > 2.$$

Pentru calculul mediei G, vom scrie

$$\ln x = \ln(m + (x-m)) = \ln m + \ln\left(1 + \frac{x-m}{m}\right) =$$

$$= \ln m + \frac{x-m}{m} - \frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{m^2} + \ldots$$

$$G=e^{\int_0^\infty \left(\ln m+\frac{x-m}{m}-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{m^2}+\dots\right)dF(x)}=$$

$$=me^{\frac{1}{m}\int_0^\infty (x-m)\,dF-\frac{1}{2m^2}\int_0^\infty (x-m)^2 dF(x)};$$

cum însă

$$\int_0^\infty (x-m)\,dF(x)=0,$$

$$G=m\cdot e^{-\frac{1}{2m^2}\sigma^2}$$

sau, neglijînd termenii de grad superior lui 2,

$$G=m\left(1-\frac{\sigma^2}{2m^2}\right).$$

Pentru a calcula media armonică, scriem

$$H=m\frac{1}{\int\frac{m}{x}dF(x)}=m\frac{1}{\int\frac{m}{m+(x-m)}dF(x)}$$

sau încă $H=m\dfrac{1}{1+\frac{1}{m^2}\sigma^2}$; neglijînd termenii de grad superior lui 2, găsim

$$H=m\left(1-\frac{1}{m^2}\sigma^2\right).$$

Relaţia dintre G şi H se obţine eliminînd pe σ^2 între expresiile lor.

46. Fie distribuţia formată cu opt puncte situate pe reţeaua din fig 14. In fiecare punct presupunem plasată masa $p_{ij}=\frac{1}{8}$ $(i, j\neq 0)$. Să se cerceteze dependenţa variabilelor ξ şi η.

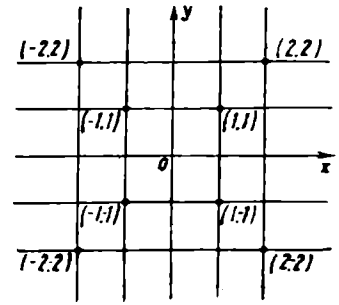

Fig. 14.

Soluţie. Calculînd momentele, găsim

$$m_1=m_2=0 \quad \text{şi} \quad M((\xi-m_1)(\eta-m_2))=M(\xi\eta)-m_1m_2=0.$$

In punctul (2,2) avem

$$p_{22}=\frac{1}{8} \quad \text{şi} \quad p_{2\cdot}=\frac{1}{4}, \quad p_{\cdot 2}=\frac{1}{4},$$

de unde

$$p_{22}\neq p_{2\cdot}p_{\cdot 2}.$$

Prin urmare variabilele ξ şi η sînt necorelate, fără a fi independente.

47. Fie dată tabela de corelaţie dintre variabilele ξ şi η:

y \ x	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Să se studieze dependenţa dintre variabilele ξ şi η.

Soluţie. Vom observa că dependenţa dintre variabilele ξ şi η este funcţională; punctele (x, y) sînt situate pe parabola $y=x^2$.

Pentru calculul coeficientului de corelaţie ρ avem:

$$m_1=(-1)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}=0, \quad m_2=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

şi

$$M(\xi-m_1)(\eta-m_2)=M(\xi\eta)-m_1m_2=-1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=0,$$

de unde rezultă

$$\rho=0.$$

Prin urmare, deşi coeficientul de corelaţie este nul, nu rezultă independenţa variabilelor.

48. Fie dată variabila aleatoare ξ cu densitatea de repartiţie $\rho(x)$ şi intervalul $[a, b]$. Vom presupune pe $[a, b]$ o diviziune în părţi egale, astfel ca

$$a=x_1-\frac{1}{2}h<x_1<x_2<\ldots<x_n+\frac{1}{2}h=b, \quad \text{cu} \quad h=x_{i+1}-x_i.$$

Densitatea de repartiție $\rho(x)$ are proprietățile:

1) $\rho(x)$ este continuă

2) $\rho(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \alpha_i x+\beta_i, & x_i\leqslant x<x_{i+1}\\ 0, & b\leqslant x\end{cases}$.

Se construiește variabila aleatoare simplă

$$\xi_0(x)=\begin{pmatrix}x_k\\ h\rho(x_k)\end{pmatrix},\ \text{dacă}\ x_k\frac{1}{2}h\leqslant x<x_k+\frac{1}{2}h,$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Dacă m_r este momentul de ordinul r al variabilei ξ și $m_{0,r}$ cel al variabilei ξ_0, să se determine relațiile dintre momentele m_r și $m_{0,r}$.

Soluție. Densitatea de repartiție a variabilei ξ este o funcție poligonală. Atunci

$$m_r=\int_a^b x^r\rho(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}x^r\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pe intervalul $[x_i,\ x_{i+1}]$ densitatea $\rho(x)$ are graficul format din segmentul care unește punctele de coordonate $(x_i,\ y_i)$ și $(x_{i+1},\ y_{i+1})$.

Expresia

$$y=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}x+\frac{y_ix_{i+1}-y_{i+1}x_i}{h}$$

fiind ecuația dreptei care unește cele două puncte, rezultă

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}x^r\rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_i}^{x_{i+1}}x^r\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h}x+\frac{y_ix_{i+1}-y_{i+1}x_i}{h}\right)\mathrm{d}x$$

şi ţinînd seamă de faptul că $x_{i+1}-x_i=h$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} x^r\rho(x)\,dx=\frac{y_i}{h}\left(\frac{(x_i+h)^{r+2}-x_i^{r+2}}{(r+1)(r+2)}-\frac{hx_i^{r+1}}{r+1}\right)+$$

$$+\frac{y_{i+1}}{h}\left(\frac{(x_{i+1}-h)^{r+2}-x_{i+1}^{r+2}}{(r+1)(r+2)}+\frac{h\cdot x_{i+1}^{r+1}}{r+1}\right).$$

In membrul al doilea, folosind formula binomului lui Newton, obţinem

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} x^r\rho(x)\,dx=y_ih\left(\frac{1}{2!}x_i^r+\frac{r}{3!}hx_i^{r-1}+\frac{r(r-1)}{4!}h^2x_i^{r-2}+\dots\right)+$$

$$+y_{i+h}\cdot h\left(\frac{1}{2!}x_{i+1}^r-\frac{r}{3!}hx_{i+1}^{r-1}+\frac{r(r-1)}{4!}h^2x_{i+1}^{r-2}\dots\right). \tag{1}$$

Pentru calculul momentelor variabilei ξ_0, vom observa că

$$m_{0,r}=\sum_{i=0}^{n-1}x_i^r\cdot h\rho(x_i)=h\sum_{i=0}^{n-1}x_i^ry_i. \tag{2}$$

Sumînd în egalitatea (1), după valorile indicelui i şi observînd că dacă $\rho(a)=\rho(b)=0$, atunci

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_i^{r-l}-x_{i+1}^{r-l})=0,$$

obţinem:

$$m_r=m_{0,r}+\frac{2r(r-1)}{4!}h^2m_{0,r-2}+\frac{2r(r-1)(r-2)(r-3)}{6!}h^4\cdot m_{0,r-4}+\dots$$

În particular,

$$m_1=m_{0,1},\quad m_2=m_{0,2}+\frac{h^2}{6},$$
$$m_4=m_{0,4}+h^2m_{0,2}+\frac{h^4}{15}. \tag{3}$$

Inversînd formulele (3), avem:

$$m_{0,1}=m_1,$$
$$m_{0,2}=m_2-\frac{h^2}{6}, \tag{4}$$
$$m_{0,4}=m_4-h^2m_2+\frac{h^4}{10}.$$

Formulele (3) şi (4) se cunosc sub numele de *formulele lui Scheppard.*

49. Fie variabila aleatoare ξ, cu densitatea de repartiţie $\rho(x)$. Notînd

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\rho(x)\,dx$$

şi cu $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ coeficienţii pentru care avem relaţia

$$e^{k_1 t + \frac{k_2}{2!}t^2 + \frac{k_3}{3!}t^3 + \ldots} = f(t) = 1 + \frac{m_1}{1!}t + \frac{m_2}{2!}t^2 + \frac{m_3}{3!}t^3 + \ldots, \qquad (1)$$

să se determine relaţiile dintre momentele $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ şi coeficienţii $k_1, k_2, \ldots$

Soluţie. Coeficienţii $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ se numesc *semi-invarianţii lui Thiele.*

Notînd prin $A(t) = k_1 t + \frac{k_2}{2!}t^2 + \frac{k_3}{3!}t^3 + \ldots$; $B(t) = \mathrm{D}A(t)$,

prin $\mathrm{D}^{(n)}$ derivata de ordinul n, şi observînd că

$$\mathrm{D}^{(n)}A(0) = k_n, \quad \mathrm{D}^{(n)}f(0) = M_n,$$

derivata întîi a egalităţii (1) se scrie

$$\mathrm{D}f(t) = \mathrm{D}A(t)\cdot f(t) = B(t)\cdot f(t). \qquad (2)$$

Derivînd de n ori şi folosind formula lui Leibniz, obţinem

$$\mathrm{D}^{(n+1)}f(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{D}^{(n-k)}B(t)\cdot \mathrm{D}^{(k)}f(t);$$

făcînd apoi $t=0$, avem:

$$m_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \mathrm{D}^{(n-i+1)}A(0)\cdot \mathrm{D}^{(i)}f(0),$$

$$m_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i k_{n-i+1}\cdot m_i. \qquad (3)$$

Din relaţia (2), dacă facem $t=0$, obţinem

$$m_1 = k_1.$$

Din relația (3), dacă facem $n=1,2$ obținem, cînd $m_0=1$

$$m_2=k_2+k_1\cdot m_1;\quad m_2=k_2+k_1^2$$

$$m_3=k_3+2k_2m_1+k_1\cdot m_2;\quad m_3=k_3+3k_1k_2+k_1^3.$$

. . . . . .

Inversînd aceste formule, obținem:

$$k_1=m_1,\quad k_2=m_2-m_1^2,\quad k_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3.$$

50. Fie dată variabila aleatoare discretă:

$$\xi=\begin{pmatrix}x_i\\p_i\end{pmatrix},\quad \sum_i p_i=1$$

și fie

$$S_\alpha=\sum_{i=1}^{n}|x_i-\alpha|\cdot p_i.$$

Să se arate că S_α este minimă, dacă $\alpha=Me$, unde Me este mediana variabilei ξ.

Soluție. Presupunem valorile x_i ordonate după mărime; atunci

$$S_\alpha=\sum^{\alpha}(\alpha-x_i)p_i+\sum_{\alpha}(x_i-\alpha)\cdot p_i.$$

Putem scrie presupunînd, $\alpha<Me$,

$$S_\alpha=\sum_{x_i\leqslant Me}(\alpha-x_i)p_i-\sum_{\alpha\leqslant x_i<Me}(\alpha-x_i)p_i+$$

$$+\sum_{Me<x_i}(x_i-\alpha)\cdot p_i+\sum_{\alpha\leqslant x_i<Me}(x_i-\alpha)p_i$$

sau încă [1])

$$S_\alpha=\sum^{Me}(\alpha-x_i)p_i+\sum_{Me}(x_i-\alpha)p_i+2\sum_{\alpha}^{Me}(x_i-\alpha)p_i.$$

---

[1]) Vom nota $\sum_{x_i\leqslant Me}$ cu $\sum^{Me}$, $\sum_{\alpha\leqslant x_i<Me}$ cu $\sum_{\alpha}^{Me}$ și $\sum_{Me<x_i}$ cu $\sum_{Me}$

Dar suma formată cu primii doi termeni se scrie

$$\sum_{a}^{Me}(\alpha-x_i)\,p_i+\sum_{Me}(x_i-\alpha)\,p_i=\sum_{a}^{Me}(\alpha-Me)\cdot p_i+\sum_{a}^{Me}(x_i-\alpha)\,p_i+$$

$$+\sum_{Me}(Me-\alpha)\,p_i+\sum_{Me}(x_i-Me)\,p_i=$$

$$=(\alpha-Me)\left(\sum_{a}^{Me}p_i-\sum_{Me}p_i\right)+\sum_{a}^{Me}(Me-x_i)\,p_i+\sum_{Me}(x_i-Me)\cdot p_i.$$

Prin definiţia medianei rezultă că

$$\sum_{a}^{Me}p_i=\sum_{Me}p_i=\frac{1}{2},$$

deci S_α se poate scrie

$$S_\alpha=\sum_{a}^{Me}(Me-x_i)\,p_i+\sum_{Me}(x_i-Me)\,p_i+2\sum_{a}^{Me}(x_i-\alpha)\,p_i.$$

Cum $\sum_{a}^{Me}(x_i-\alpha)\,p_i>0$, avem

$$S_\alpha>\sum_{a}^{Me}(Me-x_i)\,p_i+\sum_{Me}(x_i-Me)\,p_i=\sum|x_i-Me|\,p_i.$$

Rezultă că

$$S_\alpha>\sum|x_i-Me|\,p_i.$$

negalitatea se păstrează şi dacă $\alpha>Me$; rezultă că expresia

$$\sum|x_i-\alpha|\,p_i$$

este minimă pentru $\alpha=Me$.

51. Fie dată o variabilă aleatoare ξ cu densitatea de repartiţie $\varphi(x)$, pe $[a, b]$ şi nulă în afara segmentului $[a, b]$.

Fie de asemenea

$$S_\alpha=\int_a^b|x-\alpha|\,\varphi(x)\,dx.$$

Să se arate că funcţia S_α este minimă pentru $\alpha=Me$, Me fiind mediana variabilei.

Soluție. Vom arăta că funcția S_α este minimă pentru $\alpha = Me$, studiind derivata funcției. Din proprietățile funcției $|x-\alpha|$, deducem

$$S_\alpha = \int_a^\alpha (\alpha - x)\varphi(x)\,dx + \int_\alpha^b (x-\alpha)\varphi(x)\,dx.$$

Derivata funcției S_α este

$$\frac{dS_\alpha}{d\alpha} = \int_a^\alpha \varphi(x)\,dx - \int_\alpha^b \varphi(x)\,dx;$$

ea este nulă dacă

$$\int_a^\alpha \varphi(x)\,dx = \int_\alpha^b \varphi(x)\,dx,$$

adică, este nulă pentru $\alpha = Me$. Derivata a doua a funcției este

$$\frac{d^2S_\alpha}{d\alpha} = 2\varphi(\alpha) > 0.$$

Rezultă că pentru $\alpha = Me$, S_α este minimă.

52. Notînd, pentru variabila aleatoare ξ cu repartiția pe segmentul $[a, b]$, moda cu M_0, să se arate că M_0 se poate calcula cu formula

$$M_0 = x_1 - (x_2 - x_1)\frac{n_2 - n_1}{n_3 - 2n_2 + n_1},$$

unde $x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 = b$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, astfel încît

$$n_2 = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx > \int_a^{x_1} \varphi(x)\,dx = n_1; \quad n_2 = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx > \int_{x_2}^{b} \varphi(x)\,dx = n_3. \tag{1}$$

Soluție. Vom aproxima pe intervalul $[a, b]$ funcția de repartiție $\varphi(x)$, cu o parabolă de gradul al doilea:

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \tag{2}$$

astfel ca

$$\int_a^{x_1} y\,dx = n_1, \quad \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = n_2, \quad \int_{x_2}^{b} y\,dx = n_3 \tag{2'}$$

şi vom determina moda pentru această densitate. Moda, fiind valoarea pentru care densitatea de repartiţie are un maxim, este dată de ecuaţia

$$y' = 2\alpha x + \beta = 0.$$

Deducem de aici

$$M_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = x_1 + \lambda(x_2 - x_1).$$

Din condiţia (2), în ipoteza că $[a, b]$ este împărţit în trei părţi legale, deducem sistemu de ecuaţii cu diferenţe finite

$$\Delta y = 2\alpha \cdot x\Delta x + \beta \cdot \Delta x$$

$$\Delta^2 y = 2\alpha(\Delta x)^2.$$

Din ecuaţia a doua deducem

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta^2 y},$$

şi din prima ecuaţie,

$$\frac{\beta}{2\alpha}\Delta x + x \cdot \Delta x = \Delta y \frac{1}{2\alpha}$$

sau încă,

$$\frac{\beta}{2\alpha} + x = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta^2 y}.$$

Din condiţiile (2') rezultă că $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = n_2 - n_1$, $\Delta^2 y = n_3 - 2n_2 + n_1$; atunci

$$-M_0 + x_1 = (x_2 - x_1) \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_3 - 2n_2 + n_1}$$

şi

$$M_0 = x_1 - (x_2 - x_1) \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_3 - 2n_2 + n_1}.$$

53. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n variabile aleatoare independente care au aceeaşi funcţie de repartiţie F (respectiv aceeaşi densitate p).

Să presupunem că fiecare variabilă aleatoare ia valori într-un interval de lungime 2δ; să se determine valoarea medie a lungimii totale a mulţimii în care variabilele îşi iau valorile.

Soluţie. Să presupunem că variabila aleatoare ξ_i a luat o anumită valoare; atunci punem,

$$C_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } |x - \xi_i| < \delta \\ 0, \text{ dacă } |x - \xi_i| \geqslant \delta \end{cases},$$

adică, notăm cu $C_i(x)$ funcția caracteristică a intervalului de lungime 2δ, centrat în ξ_i. Funcția caracteristică a mulțimii complementare este

$$1-C_i(x)$$

și

$$\prod_{i=1}^{n}(1-C_i(x))$$

reprezintă funcția caracteristică a mulțimii de puncte care nu aparțin nici unui interval de lungime 2δ, centrat în ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, iar

$$1-\prod_{i=1}^{n}(1-C_i(x))$$

este funcția caracteristică a mulțimii de puncte care conține cel puțin unul dintre intervalele de lungime 2δ, centrat în ξ_i.

Pentru fiecare x fix, $C_i(x)$ depinde numai de ξ_i, deci $C_i(x)$ este variabilă aleatoare, și fiindcă ξ_i sînt independente și variabilele $C_i(x)$ sînt variabile independente. Să însemnăm cu $\bar{L}$ valoarea medie cerută.

$$\bar{L}=M\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-C_i(x))\right)dx\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}M\left[1-\prod_{i=1}^{n}(1-C_i(x))\right]dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{1-\prod_{i=1}^{n}M(C_i(x))\right\}dx.$$

Vom observa că

$$M[1-C_i(x)]=1-M(C_i(x))=1-P\{x-\delta<X_i<x+\delta\}=$$

$$=1-\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(u)\,du=1-F(x+\delta)+F(x-\delta).$$

Atunci,

$$\bar{L}=\int_{-\infty}^{\infty}\{1-[1-F(x+\delta)+F(x-\delta)]^n\}\,dx.$$

Dacă n este suficient de mare și 2δ mic, și punem $\lambda=2\delta n$, obținem

$$F(x+\delta)-F(x-\delta)=\int_{x-\frac{\lambda}{2n}}^{x+\frac{\lambda}{2n}}f(u)\,du=f(x)\cdot\frac{\lambda}{n}+\eta.$$

şi

$$\left[1-f(x)\frac{\lambda}{n}\right]^n \to e^{-\lambda f(x)}.$$

Obţinem, pentru $\bar{L}$, valoarea aproximativă

$$\bar{L}=\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-\lambda f(x)})\,dx.$$

54. Fie $(\xi_n)_n$ şi $(\xi'_n)_n$ două şiruri de variabile aleatoare independente, avînd respectiv aceleaşi funcţii de repartiţie; dacă $\xi_n^s = \xi_n - \xi'_n$, să se arate că oricare ar fi a şi a_n avem

a) $\frac{1}{2}P\{\sup_n(\xi_n - m_e^n)\geqslant a\}\leqslant P(\sup_n \xi_n^s \geqslant a)$,

b) $\frac{1}{2}P\{\sup_n|\xi_n - m_e^n|\geqslant a\}\leqslant P\{\sup_n|\xi_n^s|\geqslant a\}\leqslant 2P\left(\sup_n|\xi_n - a_n^*|\geqslant \frac{a}{2}\right)$,

unde m_e^n este mediana variabilei ξ_n.

Soluţie. Variabilele ξ_n şi ξ'_n avînd aceleaşi funcţii de repartiţie, medianele lor sînt egale

$$m_e(\xi_n) = m_e(\xi'_n) = m_e^n.$$

a) Între evenimentele

$$A_n=\{\xi_n - m_e^n \geqslant a\},\quad B_n=\{\xi'_n \leqslant m_e^n\},\quad C_n=\{\xi_n^s \geqslant a\}$$

avem relaţiile

$$A_m \cap B_n \subseteq C_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \{\sup_n \xi_n^s \geqslant a\}.$$

Variabilele aleatoare ξ_n şi ξ'_n fiind independente, evenimentele A_n şi B_n sînt independente şi cum $P(B_n)=\frac{1}{2}$, rezultă că

$$\frac{1}{2}\left(P\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\leqslant P(\sup_n \xi_n^s \geqslant a)$$

sau încă

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\leqslant P(\sup_n \xi_n^s \geqslant a).$$

Observînd că $P(\sup_n(\xi_n-m_e^n)\geqslant a)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$, rezultă inegalitatea cerută.

b) Știind că mediana este valoarea pentru care abaterile absolute sînt minime, avem, pentru o variabilă aleatoare ξ și orice $a\neq m_e$,

$$\int|\xi-m_e|\,dP\leqslant\int|\xi-a|\,dP,$$

de unde rezultă că

$$P(|\xi-m_e|\geqslant a)\leqslant P(|\xi-a|\geqslant a). \qquad (*)$$

Cum, pe de altă parte, avem relațiile

$$P\left(\sup_n|\xi_n^s|\geqslant a\right)\leqslant 2P\left(\sup_n|\xi_n-m_e^n|\geqslant\frac{a}{2}\right)$$

acestea, împreună cu relațiile (*), ne dau partea stîngă din (b). Partea dreaptă se obține fără dificultăți.

55. Dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt n variabile aleatoare independente și $S_k=\sum_{j=1}^{k}\xi_j$, atunci să se arate că pentru orice ε au loc inegalitățile:

a) $P(\max_{k\leqslant n}(S_k-\mu(S_k-S_n))\geqslant\varepsilon)\leqslant 2P(S_n\geqslant\varepsilon)$,

b) $P(\max_{k\leqslant n}|S_k-\mu(S_k-S_n)|\geqslant\varepsilon)\leqslant 2P(|S_n|\geqslant\varepsilon)$.

Soluție. a) Fie $S_0=0$, $S_k^*=\max_{j\leqslant k}(S_j-\mu(S_j-S_n))$ și fie

$$A_k=\{S_{k-1}^*<\varepsilon,\quad S_k-\mu(S_k-S_n)\geqslant\varepsilon\},$$

$$B_k=\{S_n-S_k-\mu(S_n-S_k)\geqslant 0\},$$

unde

$$\mu(S_n-S_k)=-\mu(S_k-S_n).$$

Deoarece

$$\{S_n^*\geqslant\varepsilon\}=\sum_{k=1}^{n}A_k,\quad \{S_n\geqslant\varepsilon\}\supset\bigcup_{k=1}A_k\cap B_k\quad\text{și}\quad P(B_k)\geqslant\frac{1}{2},$$

rezultă că

$$P(S_n\geqslant\varepsilon)\geqslant\sum_{k=1}^{n}P(A_k\cap B_k).$$

A_k și B_k fiind independente, avem

$$P(S_n\geqslant\varepsilon)\geqslant\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B_k)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$$

sau

$$P(S_n \geqslant \varepsilon) \geqslant \frac{1}{2} P(S_n^* \geqslant \varepsilon).$$

b) Folosind inegalitatea (b) din exercițiul precedent rezultă că

$$P(\max_{k \leqslant n} |S_k - \mu(S_k - S_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2P(|S_n| \geqslant \varepsilon).$$

56. Fie ξ o variabilă aleatoare care ia valorile $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ cu probabilitățile $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Să se arate că:

a) $M[(\xi - a)^2]$ este minim pentru $a = M(\xi)$,

b) $\sqrt{D(\xi)} \leqslant \frac{x_n - x_0}{2}$.

Soluție. a) Prin definiție avem

$$S(a) = M[(\xi - a)^2] = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - a)^2.$$

Vom căuta minimul funcției $S(a)$, $-\infty < a < +\infty$.

Funcția $S(a)$ fiind derivabilă în raport cu a, avem

$$\frac{dS}{da} = 2 \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - a)$$

și se vede că

$$\frac{dS}{da} = 0 \quad \text{pentru} \quad a_0 = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = M(\xi)$$

și că a_0 este punct de minim.

Deci

$$M[(\xi - a)^2] \text{ este minim dacă } a = M(\xi).$$

b) Să calculăm dispersia variabilei ξ. Avem:

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - M(\xi))^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k \left(x_n - \frac{x_0 + x_n}{2}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{x_0 + x_n}{2} - x_0\right)^2 = \left(\frac{x_n - x_0}{2}\right)^2,$$

de unde rezultă

$$\sqrt{D(\xi)} \leqslant \frac{x_n - x_0}{2}.$$

57. Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei densitate de repartiție este

$$\rho(x)=\frac{x^m}{m!}e^{-x} \qquad (x\geqslant 0).$$

Să se arate că

$$P(0<\xi<2(m+1))\geqslant\frac{m}{m+1}.$$

Soluție. Să calculăm mai întîi $M(\xi)$. Avem

$$M(\xi)=\int_0^\infty x\cdot\frac{x^m}{m!}e^{-x}dx=\frac{1}{m!}\int_0^\infty x^{m+1}e^{-x}dx=\frac{1}{m!}\Gamma(m+1)=(m+1).$$

Deci

$$M(\xi)=m+1.$$

Să calculăm acum $D(\xi)$. Avem

$$D(\xi)=\int_0^\infty(x-(m+1))^2\frac{x^m}{m!}e^{-x}dx=m+1.$$

Dacă în inegalitatea lui Cebîşev,

$$P(|\xi-M(\xi)|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2},$$

înlocuim pe $\varepsilon=m+1$, obținem

$$P(|\xi-M(\xi)|<m+1)\geqslant 1-\frac{m+1}{(m+1)^2}$$

sau

$$P(0<\xi<2(m+1))\geqslant\frac{m}{m+1}.$$

FUNCȚIILE CARACTERISTICE ALE REPARTIȚIILOR UZUALE. FUNCȚII DE TIP POZITIV

Variabilei aleatoare ξ îi asociem funcția de variabilă complexă $e^{it\xi}$ care pentru fiecare valoare fixă a lui t real este variabilă aleatoare complexă.

Dacă funcția de repartiție a variabilei ξ este $F(x)$, atunci

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mathrm{d}F(x) \tag{1}$$

se numește *funcția caracteristică* a variabilei ξ.

Funcția $\varphi(t)$ este definită pe dreapta reală și are valori complexe.

Dacă variabila ξ are densitatea de repartiție ρ, atunci (1) devine

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pentru funcția aleatoare discretă $\xi:\begin{pmatrix}x_i\\p_i\end{pmatrix}$, $i\in I$, unde I este cel mult numerabilă, funcția caracteristică are forma

$$\varphi(t)=\sum_i e^{itx_i}p_i\,.$$

Dintre proprietățile funcției caracteristice vom menționa pe cele mai importante:

1) $\varphi(t)$ este uniform continuă și $\varphi(0)=1$, $|\varphi(t)|\leqslant 1$.

2) Dacă variabila ξ are momente absolute pînă la ordinul n, atunci $\varphi(t)$ este de n ori diferențiabilă și

$$\frac{d\varphi^{(k)}(0)}{dt} = i^k m_k(\xi) \qquad (k \leqslant n).$$

3) Dacă variabila ξ are momente de orice ordin, atunci pentru orice t finit,

$$\varphi(t) = 1 + im_1(\xi)\frac{t}{1!} + i^2 m_2(\xi)\frac{t^2}{2!} + \ldots + i^n m_n(\xi)\frac{t^n}{n!} + \ldots$$

seria din membrul al doilea fiind convergentă.

4) Fie variabila ξ cu repartiția $F(x)$ și x_1, x_2 $(x_1 \leqslant x_2)$ două puncte de continuitate pentru $F(x)$; are loc egalitatea

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t)\, dt.$$

5) Dacă x este un punct de continuitate al funcției $F(x)$, atunci

$$F(x) = \lim_{y \to \infty} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, dt.$$

6) Dacă variabila aleatoare ξ are densitatea ρ, atunci după formula de inversiune a lui Fourier,

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt.$$

7) Dacă variabilele independente ξ și η au funcțiile caracteristice $\varphi_\xi(t)$ și $\varphi_\eta(t)$, atunci variabila $a\xi + b$ (a, b constante reale) are funcția caracteristică

$$e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$$

și variabila $\xi + \eta$ are funcția caracteristică

$$\varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t).$$

8) Dacă $F_n(x)$ este un șir de funcții de repartiție convergent spre funcția de repartiție $F(x)$, atunci șirul de funcții caracteristice corespunzătoare $\varphi_n(t)$ tinde spre funcția caracteristică $\varphi(t)$, corespunzătoare repartiției $F(x)$ (și reciproc).

9) Orice funcție caracteristică este funcție de tip pozitiv.

PROBLEME

1. Să se determine funcţia caracteristică a variabilei aleatoare ξ care urmează legea de repartiţie binomială.

Să se calculeze primele două momente şi să se arate că legea limită redusă tinde către legea normală.

Soluţie. Distribuţia variabilei ξ într-o singură probă este

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix};$$

atunci

$$\varphi(t) = pe^{it} + q.$$

In cazul a n extracţii independente avem n variabile independente de tipul ξ şi se studiază suma

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Variabila η are funcţia caracteristică

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} p^k q^{n-k}.$$

Dezvoltînd pe $\varphi(t)$ în serie, după puterile lui t, avem

$$\varphi(t) = 1 + \frac{inp}{1} t - \frac{p^2n^2 + qpn}{2} t^2 + \ldots,$$

de unde deducem

$$m_1 = \frac{\varphi'(0)}{i} = \frac{np}{i} \quad \text{şi} \quad m_2 = \frac{\varphi''(0)}{i^2} = n^2p^2 + qpn.$$

Abaterea patratică este

$$\nu_2 = (m_2 - m_1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{npq}.$$

In cazul urnei reduse, se determină variabila

$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}},$$

pentru care avem funcţia caracteristică

$$\psi_n(t) = \left(pe^{i\frac{qt}{\sqrt{npq}}} + qe^{-i\frac{t}{\sqrt{npq}}} \right)^n.$$

Dezvoltînd în serie membrul al doilea, se obţine

$$\psi_n(t)=\left(1-\frac{1}{2n}t^2+\frac{ipq\,(p-q)}{(\sqrt{npq})^3}\,\frac{t^3}{3}+\ldots\right)^n,$$

de unde se deduce că $\psi_n(t)\to e^{-\frac{1}{2}t^2}$, cînd $n\to\infty$.

2. Să se calculeze funcţia caracteristică şi momentele repartiţiei gaussiene:

$$p(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2(x-a)^2};\quad -\infty<x<+\infty.$$

Soluţie. Din definiţia funcţiei caracteristice, rezultă

$$\varphi(t)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-h^2(x-a)^2}dx.$$

Ştiind că

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi},$$

obţinem pentru funcţia caracteristică forma

$$\varphi(t)=e^{ita-\frac{1}{4h^2}t^2}.$$

Dezvoltînd în serie şi făcînd derivatele în origine, găsim

$$\frac{\varphi'(0)}{i}=m_1=a,\quad \frac{\varphi''(0)}{i^2}=m_2=a^2+\frac{1}{2h^2},$$

de unde

$$\mu_2=\frac{1}{2h^2}\quad\text{şi}\quad\sigma=\frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Dacă $a=0$, pentru momentele centrate de ordin impar, se obţine:

$$\mu_{2k+1}=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

şi pentru cele de ordin par

$$\mu_{2k}=\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}\,\sigma^{2k}.$$

Derivata de ordinul întîi a funcţiei caracteristice este

$$\varphi'(t)=\left(ia-\frac{1}{2h^2}t\right)\cdot\varphi(t);$$

aplicînd formula de derivare a produsului şi observînd că factorul $\left(ia-\frac{1}{2h^2}t\right)$ are numai prima derivată nenulă obţinem

$$\varphi^{(n+1)}(t)=\left(ia-\frac{1}{2h^2}t\right)\varphi^{(n)}(t)-\frac{n}{2h^2}\varphi^{(n-1)}(t).$$

Derivatele în origine ale funcţiei caracteristice fiind egale cu $i^k m_k(\xi)$ se obţine relaţia de recurenţă între momente

$$m_{n+1}(\xi)=a\cdot m_n(\xi)+\frac{n}{2h^2}m_{n-1}.$$

Dacă presupunem $a=0$, momentele m_n se reduc la momentele centrate μ_n, între care se stabilesc relaţiile de mai înainte, ţinînd seamă că $\mu_1=0$ şi $\mu_2=\sigma$.

3. Fie ξ o variabilă aleatoare Poisson; să se stabilească funcţia ei caracteristică.

Soluţie. Să presupunem că variabila aleatoare ξ are densitatea

$$p(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ e^{-a} & e^{-a}\frac{a}{1!} & \dots e^{-a}\frac{a^n}{n!} & \dots \end{pmatrix}.$$

Variabila ξ fiind de tip discret, funcţia ei caracteristică este de forma

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itx_k}p_k.$$

În cazul de mai sus, avem

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}e^{-a}\frac{ak}{k!}=e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}e^{itk}=e^{a(e^{it}-1)}.$$

4. Fie ξ o variabilă aleatoare cu repartiţie uniformă; să se determine funcţia caracteristică corespunzătoare.

Soluţie. Variabila aleatoare ξ are densitatea

$$p(x)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x<a \text{ sau } x>b \\ \frac{1}{b-a}, & \text{dacă } a\leqslant x\leqslant b. \end{cases}$$

Funcţia caracteristică este

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\rho(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} e^{itx}\,dx=\frac{1}{b-a}\,\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}.$$

Folosind formulele lui Euler, se obţine

$$\varphi(t)=\frac{2}{b-a}\cdot\frac{\sin\frac{b-a}{2}t}{t}\cdot e^{i\frac{a+b}{2}t}.$$

5. Fie ξ o variabilă aleatoare care urmează legea gamma; să se determine funcţia caracteristică corespunzătoare.

Soluţie. Variabila aleatoare ξ avînd legea de repartiţie gamma, densitatea ei este dată de

$$\rho_{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\beta^{\alpha+1}}x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{pentru } x>0\\ 0 & \text{pentru } x\leqslant 0\end{cases},$$

unde $\alpha>-1$, $\beta>0$ sînt parametrii repartiţiei. Funcţia caracteristică a variabilei ξ este

$$\varphi(\alpha,\beta;t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\beta^{\alpha+1}}\int_{0}^{\infty}x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}}e^{itx}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\beta^{\alpha+1}}\int_{0}^{\infty}x^{\alpha}e^{-\left(\frac{1}{\beta}-it\right)x}dx. \qquad (*)$$

Integrînd prin părţi, se obţine

$$\varphi(\alpha,\beta;t)=\frac{1-i\beta t}{(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)\,\beta^{\alpha+2}}\int_{0}^{\infty}x^{\alpha+1}e^{-\left(\frac{1}{\beta}-it\right)x}dx.$$

Ştiind că $(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)=\Gamma(\alpha+2)$, obţinem formula de recurenţă

$$\varphi(\alpha,\beta;t)=(1-i\beta t)\cdot\varphi(\alpha+1,\beta;t)$$

sau

$$\varphi(\alpha+1,\beta;t)=\frac{1}{1-i\beta t}\varphi(\alpha,\beta;t).$$

Să presupunem α întreg; atunci

$$\varphi(n+1,\beta;t)=\frac{1}{(1-i\beta t)^{n+1}}\varphi(0,\beta;t);$$

cum

$$\varphi(0,\ \beta;\ t)=\frac{1}{1-i\beta t},$$

rezultă că

$$\varphi(n+1,\ \beta;\ t)=\frac{1}{(1-i\beta t)^{n+2}}.$$

Dacă în integrala (*) facem schimbarea de variabilă

$$\left(\frac{1}{\beta}-it\right)x=u,$$

atunci

$$\varphi(\alpha,\ \beta;\ t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\beta^{\alpha+1}}\cdot\frac{\beta^{\alpha+1}}{(1-\beta it)^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}u^{\alpha}e^{-u}du,$$

de unde rezultă că

$$\varphi(\alpha,\ \beta;\ t)=\frac{1}{(1-\beta it)^{\alpha+1}}.$$

6. Fie ξ o variabilă aleatoare care urmează legea de repartiție χ^2. Să se determine funcția caracteristică corespunzătoare.

Soluție. Densitatea variabilei aleatoare ξ este dată de

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & \text{dacă } x>0\\ 0, & \text{dacă } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Dacă în exercițiul precedent facem $\alpha=\frac{k}{2}-1$ și $\beta=2$, obținem funcția caracteristică a variabilei ξ,

$$\varphi(t)=\frac{1}{(1-2it)^{\frac{k}{2}-1}}.$$

7. Fie dată variabila aleatoare discretă ξ care urmează legea

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots\\ p & pq & pq^2 & \dots & pq^{n-1} & \dots\end{pmatrix}.$$

Să se determine funcția caracteristică a variabilei ξ, valoarea medie a ei și dispersia.

Soluție. Variabila aleatoare ξ se numește *variabilă binomială* cu exponent negativ, deoarece probabilitățile sînt coeficienții binomului

$$p(1-q)^{-1}=p(1+q+q^2+\dots).$$

Funcţia caracteristică a variabilei ξ este

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{itn}p\cdot q^{n-1}=pe^{it}\sum_{n=1}^{\infty} e^{it(n-1)}q^{n-1}=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.$$

Derivata întîi a funcţiei φ, în originea $t=0$, este

$$\varphi'(0)=i\cdot\frac{1}{p},$$

de unde

$$M(\xi)=\frac{1}{p}.$$

Derivata a doua, în originea $t=0$, este

$$\varphi''(0)=i^2\frac{1+q}{p^2},$$

de unde

$$M_2(\xi)=\frac{1+q}{p^2}.$$

Abaterea medie pătratică a variabilei ξ este

$$D(\xi)=\frac{q}{p^2}$$

şi deci

$$\sigma(\xi)=\frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Variabila aleatoare normată este

$$\eta=\frac{p\left(\xi-\frac{1}{p}\right)}{\sqrt{q}}.$$

8. Să se arate că dacă ξ şi η sînt două variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele dînd naştere la o distribuţie Poisson cu parametrii respectivi λ şi μ, atunci suma lor $\xi+\eta$ urmează, de asemenea, o lege Poisson cu parametrul $\lambda+\mu$.

Soluţie. Avem

$$p(\xi=\alpha)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!}e^{-\lambda} \quad \text{şi} \quad p(\eta=\alpha)=\frac{\mu^{\alpha}}{\alpha!}e^{-\mu} \quad (\alpha=0,\ 1,\ \ldots).$$

Variabilele ξ şi η fiind independente, funcţia lor caracteristică este egală cu produsul funcţiilor caracteristice. Avem

$$\varphi(t,\ \lambda)\cdot\varphi(t,\ \mu)=e^{\lambda(e^{ti}-1)}e^{\mu(e^{ti}-1)}$$

şi deci

$$\varphi(t,\ \lambda)\cdot\varphi(t,\ \mu)=e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}=\varphi(t;\ \lambda+\mu).$$

9. Fie $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ n variabile aleatoare independente, de tip Poisson. Ştiind că densitatea variabilei ξ_k este

$$p_k(x)=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & n & \ldots \\ e^{-\lambda_k} & \ldots & e^{-\lambda_k}\dfrac{\lambda_k^n}{n!} & \ldots \end{pmatrix},$$

să se arate că variabila aleatoare $\zeta=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ urmează deasemenea o lege de tip Poisson.

Soluţie. Vom arăta că funcţia caracteristică a variabilei sumă ζ este o funcţie caracteristică corespunzătoare unei variabile Poisson.

Notăm cu $\varphi(\lambda_k,\ t)$ funcţia caracteristică a variabilei ξ_k; atunci funcţia caracteristică a variabilei ζ este

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi(\lambda_k,\ t).$$

Ştiind că

$$\varphi(\lambda_k,\ t)=e^{\lambda_k(e^{it}-1)}$$

obţinem

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{n}e^{\lambda_k(e^{it}-1)}=e^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\right)(e^{it}-1)}=\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k,\ t\right);$$

prin urmare variabila aleatoare ζ urmează legea Poisson cu parametrul $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$.

10. Fie $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$, n variabile aleatoare independente normale. Să se arate că variabila aleatoare $\zeta=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ urmează tot o lege normală.

Soluţie. Vom determina funcţia caracteristică a variabilei ζ. Ştiind că variabila aleatoare ξ_k are funcţia caracteristică

$$\varphi_k(t)=e^{ita_k-\frac{1}{4h_k^2}t^2},$$

variabila aleatoare ζ are funcţia caracteristică

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t)=e^{it\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h_k^2}\cdot t^2}.$$

Dacă notăm cu $a=\sum_{k=1}^{n}a_k$ şi $h^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h_k^2}\right)^{-1}$, atunci variabila aleatoare ζ este variabilă normală cu media egală cu suma mediilor şi cu dispersia egală cu media geometrică a dispersiilor.

11. Fie $\xi_1, \ldots, \xi_n$, n variabile aleatoare independente, urmînd legea de repartiţie χ^2. Să se arate că variabila aleatoare $\zeta=\xi_1+\ldots+\xi_n$ urmează tot o lege χ^2.

Soluţie. Să presupunem că variabila aleatoare ξ_k are densitatea χ cu parametrul λ_k; atunci funcţia ei caracteristică este

$$\varphi_k(t)=\left(\frac{1}{1-2it}\right)^{\frac{\lambda_k}{2}-1}.$$

Funcţia caracteristică a variabilei ζ este

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t)=\left(\frac{1}{1-2it}\right)^{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_k}{2}-1\right)},$$

de unde

$$\varphi(t)=\left(\frac{1}{1-2it}\right)^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k-2(n-1)}{2}-1}.$$

Rezultă că variabila ζ are repartiţia de tipul χ^2 cu $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k-2(n-1)$ grade de libertate.

12. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, n variabile aleatoare binomiale independente. Să se arate că variabila aleatoare $\zeta=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ urmează tot o lege binomială.

Soluţie. Funcţia caracteristică a variabilei ξ_k este

$$\varphi_k(t)=(pe^{it}+q)^{m_k}.$$

Variabila aleatoare ζ are funcţia caracteristică

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t)=(pe^{it}+q)^{\sum_{k=1}^{n}m_k}.$$

13. Să se arate că dacă parametrul λ al unei distribuţii Poisson creşte necontenit, atunci legea Poisson a variabilei normate convenabil tinde către legea normală.

Soluţie. Funcţia caracteristică a distribuţiei Poisson este

$$\varphi(t,\ \lambda)=M(e^{\lambda ti})=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!}e^{\alpha ti}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{ti}-1)}.$$

Funcţia caracteristică a abaterii reduse

$$\frac{\xi-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

este

$$\psi(t,\ \lambda)=M\left(e^{\frac{\alpha-\lambda}{\sqrt{\lambda}}ti}\right)=e^{-\sqrt{\lambda}ti}M\left(e^{\alpha\frac{t}{\sqrt{\lambda}}i}\right)=e^{-\sqrt{\lambda}ti}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}},\ \lambda\right)=$$

$$=e^{-\sqrt{\lambda}ti}e^{\lambda\left(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}i}-1\right)}=e^{\lambda\left(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}i}-1\right)-\sqrt{\lambda}ti}$$

sau

$$\psi(t,\ \lambda)=\exp\left\{\lambda\left(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}i}-1\right)-\sqrt{\lambda}ti\right\}.$$

Dezvoltînd în serie, obţinem

$$\psi(t,\ \lambda)=\exp\left\{\lambda\left[\frac{t}{\sqrt{\lambda}}i-\frac{t^2}{2\lambda}+\Theta\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right)\right]-\sqrt{\lambda}ti\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}+\Theta\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\right\},$$

de unde

$$\lim_{\lambda\to\infty}\psi(t,\ \lambda)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

care este funcţia caracteristică a legii normale cu $\sigma^2=1$.

Se știe că dacă funcțiile caracteristice $\psi(t, \lambda)$ tind către funcția caracteristică a legii normale, atunci și funcțiile de repartiție corespunzătoare tind, de asemenea, către funcția de repartiție a legii normale.

14. Să se arate că dacă variabila aleatoare ξ are repartiția de tipul χ^2 cu k grade de libertate, atunci funcția caracteristică a variabilei aleatoare

$$\eta = \frac{\xi - (k-2)}{\sqrt{2(k-2)}}$$

tinde către funcția caracteristică a unei variabile normale, cînd $k \to \infty$.

Soluție. Funcția caracteristică a variabilei ξ este

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{1-2it}\right)^{\frac{k-2}{2}},$$

iar aceea a variabilei η este

$$\psi(t, k) = e^{-it\frac{k-2}{\sqrt{2(k-2)}}} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{2it}{\sqrt{2(k-2)}}}\right)^{\frac{k-2}{2}}.$$

Dacă aplicăm logaritmii naturali în ambii membri, obținem

$$\ln \psi(t, k) = -it\frac{k-2}{\sqrt{2(k-2)}} - \frac{k-2}{2} \ln\left(1 - \frac{2it}{\sqrt{2(k-2)}}\right).$$

Dezvoltînd în serie $\ln\left(1 - \frac{2it}{\sqrt{2(k-2)}}\right)$ și trecînd la limită pentru $k \to \infty$, obținem

$$\lim_{k \to \infty} \ln \psi(t, k) = -t^2.$$

Legea limită care se obține este legea normală cu funcția caracteristică e^{-t^2}.

15. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ m variabile aleatoare binomiale cu exponent negativ, independente și fie $\zeta_m = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m$.

Să se determine:

a) Funcția caracteristică a variabilei ζ_m.

b) Variabila aleatoare normată corespunzătoare variabilei ζ_m.

c) Să se arate că funcția caracteristică a variabilei normate tinde către funcția caracteristică a unei variabile normale, cînd m tinde către infinit.

Soluție. a) Funcția caracteristică a variabilei ξ_k fiind

$$\varphi_k(t)=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}},$$

funcția caracteristică a variabilei ζ_m este ψ_m,

$$\psi_m=\left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^m.$$

b) Să observăm că valoarea medie a variabilei ζ_m este $\frac{m}{p}$, iar dispersia ei $\frac{\sqrt{mq}}{p}$; atunci variabila normată corespunzătoare este

$$\eta_m=\frac{p\left(\zeta_m-\frac{m}{p}\right)}{\sqrt{mq}}.$$

c) Funcția caracteristică a variabilei η_m este

$$\Phi_m(t)=e^{-it\frac{m}{\sqrt{mq}}}\psi_m\left(\frac{p}{\sqrt{mq}}\cdot t\right)$$

după rezultatul (7) de la p. 190.

Făcînd calculele, găsim

$$\Phi_m(t)=\left(\frac{1}{p}e^{\frac{qi}{\sqrt{mq}}t}-\frac{q}{p}e^{\frac{i}{\sqrt{mq}}t}\right)^{-m}=\left(1+\frac{1}{2m}t^2+\theta\left(m^{-\frac{3}{2}}\right)\right)^{-m}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{m\to\infty}\Phi_m(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

16. Să se determine funcțiile caracteristice pentru variabilele aleatoare ale căror densități de repartiție sînt:

1) $p(x)=\frac{a}{2}e^{-a|x|}$, $\quad -\infty<x<+\infty$.

2) $p(x)=\frac{a}{(a^2+x^2)}$, $\quad -\infty<x<+\infty$.

3) $p(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } |x|>a\\ \frac{a-|x|}{a^2}, & \text{dacă } |x|\leqslant a.\end{cases}$

4) $p(x)=\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{\pi ax^2}$, $\quad -\infty<x<+\infty$.

Soluție. 1) Știind că pentru o variabilă aleatoare ξ, a cărei densitate de repartiție este $\rho(x)$, funcția caracteristică se definește prin egalitatea

$$\varphi(t)=M(e^{it\xi})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,\rho(x)\,dx.$$

vom obține în primul caz

$$\varphi^{(1)}(t)=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-a|x|}\,dx.$$

Știind că

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{dacă } x<0\\ 0, & \text{dacă } x=0\\ x, & \text{dacă } x>0,\end{cases}$$

integrala din membrul al doilea se descompune:

$$\varphi^{(1)}(t)=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{(it+a)x}\,dx+\frac{a}{2}\int_{0}^{\infty}e^{(it-a)x}\,dx.$$

In prima integrală, schimbînd pe x în $-x$, obținem

$$\varphi^{(1)}(t)=\frac{a}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-(it+a)x}\,dx+\frac{a}{2}\int_{0}^{\infty}e^{(it-a)x}\,dx.$$

Cum $e^{itx}+e^{-itx}=2\cos tx$,

$$\varphi^{(1)}(t)=a\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\cos tx\,dx.$$

Integrînd prin părți, de două ori, obținem

$$\varphi^{(1)}(t)=1-\frac{t^2}{a}\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\cos tx\,dx,$$

de unde deducem

$$\varphi^{(1)}(t)=\frac{a^2}{a^2+t^2}=\frac{1}{1+\frac{t^2}{a^2}}=1-\frac{t^2}{a^2}+\frac{t^4}{a^4}-\dots$$

Se observă că momentele de ordin impar sînt toate nule.

2) Pentru $\rho(x)=\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, avem

$$\varphi^{(2)}(t)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Dacă luăm repartiția cu densitatea

$$\rho(x)=\frac{a}{\pi}\varphi^{(1)}(x),$$

atunci din formula de inversiune:

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)\,dt,$$

dacă $\rho(x)$ este absolut integrabilă, rezultă pentru funcția caracteristică

$$\varphi^{(2)}(t)=\frac{a}{2}e^{-a|t|}.$$

3) Pentru $\rho(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } |x|>a\\ \frac{a-|x|}{a^2}, & \text{dacă } |x|\leqslant a\end{cases}$

avem:

$$\varphi^{(3)}(t)=\int_{-a}^{a}\frac{a-|x|}{a^2}\cdot e^{itx}\,dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left\{\int_{-a}^{0}(a+x)e^{itx}\,dx+\int_{0}^{a}(a-x)e^{itx}\,dx\right\}=\frac{2}{a^2}\int_{0}^{a}(a-x)\cos tx\,dx.$$

Integrînd prin părți, avem

$$\varphi^{(3)}(t)=\frac{2}{a^2}\left\{(a-x)\cdot\frac{\sin tx}{t}\Big|_0^a+\int_0^a\frac{\sin tx}{t}dx\right\}=$$

$$=\frac{2}{a^2t^2}(-\cos tx)\Big|_0^a=\frac{2}{a^2t^2}-\frac{2\cos ta}{a^2t^2}.$$

Scriind funcția caracteristică sub forma

$$\varphi^{(3)}(t)=\frac{2}{a^2t^2}(1-\cos at)=\frac{4\sin^2\frac{at}{2}}{a^2t^2},$$

se observă că

$$\lim_{t\to\infty}\varphi^{(3)}(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{at}{2}}{\frac{at}{2}}\right)^2=1.$$

4) Pentru $\varphi^{(4)}(t)$, folosind formula de inversiune, avem

$$\varphi^{(4)}(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } |t|>a\\ \frac{a-|t|}{a^2}, & \text{dacă } |t|\leqslant a.\end{cases}$$

17. Se dă funcţia

$$g(x)=Ae^{-ax}\quad (x>0).$$

Se cere:

a) Să se determine constanta A astfel, încît $g(x)$ să fie o densitate de repartiţie.

b) Funcţia caracteristică corespunzătoare.

c) Momentele de ordinul întîi şi de ordinul al doilea.

Soluţie. a) Pentru ca $g(x)$ să fie densitatea unei repartiţii, trebuie ca

$$1=A\int_0^\infty e^{-ax}\,dx=\frac{A}{a}\int_0^\infty e^{-t}\,dt=-\frac{A}{a}e^{-t}\Big|_0^\infty=\frac{A}{a}.$$

De unde rezultă că $A=a$.

b) Funcţia caracteristică este

$$\varphi(t)=a\int_0^\infty e^{-at}e^{itx}\,dx=a\int_0^\infty e^{x(it-a)}\,dx.$$

Notînd $x(it-a)=v$ şi făcînd calculele, obţinem

$$\varphi(t)=\frac{a}{a-it}=\frac{a}{a^2+t^2}\cdot(a+it).$$

c) Pentru calculul momentelor ştim că:

$$M_1=\frac{\{\varphi'(t)\}_{t=0}}{i}\quad\text{şi}\quad M_2=\frac{\{\varphi''(t)\}_{t=0}}{i^2};$$

calculînd cele două derivate în $t=0$, obţinem

$$M_1=\frac{1}{a}\quad\text{şi}\quad M_2=\frac{2}{a^2}.$$

18. Se dă funcţia

$$g(x)=\frac{C}{1+x^2}.$$

Se cere să se determine constanta C, astfel încît

a) $g(x)$ să fie o densitate de repartiţie.

b) Să se calculeze funcţia caracteristică corespunzătoare.

Soluţie. a) Pentru ca $g(x)$ să fie densitatea unei repartiţii trebuie ca

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx=C\pi,$$

deci

$$C=\frac{1}{\pi}.$$

b) Funcţia caracteristică este

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}g(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx=e^{-|t|}.$$

Calculul integralei se face prin reziduuri, considerînd funcţia

$$f(z)=\frac{e^{itz}}{1+z^2}$$

şi calculînd integrala (fig. 15) pe conturul (Γ).

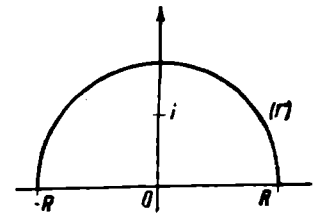

Fig. 15.

Avem:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi R_1=\pi e^{-|t|},$$

întrucît $R_1=\frac{1}{2}e^{-t}$. Pentru integrala pe conturul (Γ) deducem

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{itz}}{1+z^2}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\max\left|\frac{e^{itz}}{1+z^2}\right|\pi\cdot R.$$

Deoarece

$$|z^2+1|>|z^2|-1=R^2-1,$$

$$\max_{z}\left|\frac{1}{1+z^2}\right|\leqslant\frac{1}{R^2-1}$$

$$\max \left| \frac{e^{itz}}{1+z^2} \right| \cdot R < \frac{R}{R^2-1}.$$

Pe de altă parte, cum $\frac{R}{R^2-1}$ tinde către zero cînd $R \to \infty$, avem

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{itz}}{1+z^2}\, dz = 0.$$

19. Să se determine densităţile de repartiţie corespunzătoare funcţiilor caracteristice

1) $e^{-a^2t^2}$,

2) $e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

Soluţie. 1) Folosim formula de inversiune

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt.$$

In cazul în care ρ este absolut integrabilă, avem (pentru primul caz)

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-a^2t^2}\, dt = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(at+\frac{ix}{2a}\right)^2} dt.$$

Deducem că

$$\rho(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}},$$

adică se obţine densitatea repartiţiei normale.

2) Pentru funcţia caracteristică $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ să facem dezvoltarea în serie de puteri:

$$\varphi(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{ikt}.$$

Vom determina mai întîi funcţia de repartiţie. Ştiind că

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, dt,$$

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itk}-e^{it(k-x)}}{it}\,dt=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{itx}-e^{-itx}+e^{it(k-x)}-e^{-it(k-x)}}{2\pi it}\,dt=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{\sin tx}{\pi t}\,dt-\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\,dt\right).$$

Pentru $0<x$, $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin tx}{\pi t}=\frac{1}{2}$ şi

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2}-e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}-e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{[x]}\frac{\lambda^k}{k!}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\,dt-e^{-\lambda}\sum_{k=[x]+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\,dt.$$

Ţinînd seamă de relaţiile:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\,dt=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k>x\\ -\frac{1}{2}, & k<x\end{cases},\qquad 1=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{[x]}\frac{\lambda^k}{k!}+e^{-\lambda}\sum_{k=[x]+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!},$$

obţinem

$$F(x)-F(0)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{[x]}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Se vede de aici că se obţine funcţia de repartiţie a unei variabile Poisson şi prin urmare funcţia caracteristică dată corespunde repartiţiei Poisson care în punctul k are masa $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

20. Să se determine funcţia de repartiţie corespunzătoare funcţiei caracteristice $e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

Soluție. Vom aplica teorema de inversiune. Avem:

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-itx}}{it}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-itx}}{it}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin tx}{t}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos tx}{it}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin tx}{t}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Să calculăm $F'(x)$ și apoi să integrăm prin părți; obținem:

$$F'(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos tx\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sin tx}{\pi x}e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{\pi x}\int_{0}^{\infty}t\sin tx\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi x}\int_{0}^{\infty}t\sin tx\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{1}$$

Analog,

$$F''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}t\sin tx\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă

$$F'(x)=\frac{-1}{x}F''(x).$$

Integrînd, obținem

$$F'(x)=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

sau

$$F(x)=C\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+C_0.$$

Rămîne să determinăm constantele C și C_0. Știm că

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi},\quad F(-\infty)=0=C_0$$

$$F(+\infty)=1=C\sqrt{2\pi}+C_0.$$

De unde $C_0=0$; $C=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Observație. Funcția de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ se poate obține din exercițiul precedent pct. 1, dacă $a^2=\frac{1}{2}$.

21. Să se aplice formula de inversiune pentru funcția caracteristică

$$\varphi(t)=e^{-|t|}.$$

Soluție. Aplicînd formula de inversiune, obținem

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}\cdot e^{-itx}\,dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{t}\cdot e^{-itx}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t}e^{-itx}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-t}[e^{itx}-e^{-itx}]\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cos tx\,dt.$$

Integrînd prin părți, deducem

$$p(x)=\frac{1}{\pi}[-e^{-t}\cos tx]\Big|_0^{\infty}-\frac{x}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin tx\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{x}{\pi}[e^{-t}\sin tx]\Big|_0^{\infty}-\frac{x^2}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cos tx\,dt.$$

De unde

$$p(x)=\frac{1}{\pi}-x^2p(x)$$

sau încă

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

Observație. Am văzut, în problema 7, că unei variabile Cauchy îi corespunde funcția caracteristică $e^{-|t|}$.

22. Fie ξ o variabilă aleatoare, pentru care

$$\overline{M}_1(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,dF(x)$$

există. Dacă $M(\xi)=0$ și $\varphi(t)$ este funcția caracteristică a variabilei ξ, să se arate că

$$\overline{M}_1(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{Re}\,(\varphi(t))}{t^2}\,dt,$$

unde $\mathrm{Re}(z)$ reprezintă partea reală a numărului complex z.

Soluție. Deoarece

$$1-\mathrm{Re}\,[\varphi(t)]=1-\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dF(x)\right]=$$

$$=1-\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(\cos tx+i\sin tx)\,dF(x)\right]=$$

$$=1-\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)-\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF(x),$$

avem

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{Re}\,(\varphi(t))}{t^2}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos tx}{t^2}\,dt\right)dF(x).$$

Însă

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos tx}{t^2}\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos tx}{t^2}\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt.$$

Integrînd prin părți și făcînd schimbarea de variabilă $xt=v$, avem

$$\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt=2x\int_{0}^{Tx}\frac{\sin v}{v}\,dv-2\left(\frac{1-\cos Tx}{T}\right),$$

de unde

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos tx}{t^2}\,dt=|x|.$$

Rezultă, deci,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{Re}\,(\varphi(t))}{t^2}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,dF(x)=\overline{M}_1(\xi),$$

deoarece am presupus că $M(\xi)=0$.

23. Să se arate că dacă $M(\xi)=0$ şi $\overline{M}_1(\xi)$ există, atunci

$$\overline{M}_1(\xi)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,(\varphi'(t))}{t}\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,(\varphi'(t))}{t}\,dt.$$

Soluţie. Se ştie din exerciţiul precedent că

$$\overline{M}_1(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{Re}\,(\varphi(t))}{t^2}\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\mathrm{Re}\,(\varphi(t))}{t^2}\,dt.$$

Integrînd prin părţi, obţinem

$$\overline{M}_1(\xi)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1-\mathrm{Re}\,(\varphi(t))}{t}\Big|_0^{\infty}\right)-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,(\varphi'(t))}{t}\,dt.$$

Cum

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\mathrm{Re}\,(\varphi(t))}{t}=0\quad\text{şi}\quad\lim_{t\to\infty}\frac{1-\mathrm{Re}\,(\varphi(t))}{t}=0,$$

rezultă formula cerută.

24. Să se arate că dacă $f(t)$ este funcţie caracteristică, atunci funcţia

$$\varphi(t)=e^{f(t)-1}$$

este de asemenea funcţie caracteristică.

Soluţie. Cum $\varphi(t)$ este continuă şi $\varphi(0)=1$, atunci, după teorema lui Bochner, pentru ca $\varphi(t)$ să fie funcţie caracteristică este necesar şi suficient ca ea să fie de tip pozitiv.

Trebuie să arătăm că oricare ar fi $t_1, t_2, \ldots, t_n$ şi numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_j-t_k)\cdot z_j\bar{z}_k\geqslant 0. \qquad (*)$$

Dezvoltînd exponenţiala $e^{f(x)}$, obţinem

$$\sum_k \sum_j \varphi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k = \frac{1}{e} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_k \sum_j f^h(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k .$$

Cum $f(t)$ este funcţie caracteristică, rezultă că toţi termenii seriei sînt nenegativi, deci inegalitatea (*) este verificată.

25. Să se arate că dacă $f(t)$ este funcţie caracteristică, atunci funcţia

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \int f(z)\, dz$$

este de asemenea funcţie caracteristică.

Soluţie. După teorema lui Bochner, trebuie să arătăm că

$$I = \sum_j \sum_k \varphi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geqslant 0$$

sau că

$$I = \sum_j \sum_k \frac{1}{t_j - t_k} \left(\int_0^{t_j - t_k} f(z)\, dz \right) z_j \bar{z}_k \geqslant 0.$$

Făcînd în integrală schimbarea de variabilă

$$z = (t_j - t_k) x,$$

obţinem

$$I = \sum_j \sum_k \left(\int_0^1 f((t_j - t_k) x)\, dx \right) z_j \bar{z}_k$$

sau

$$I = \int_0^1 \left(\sum_j \sum_k f((t_j - t_k) x) z_j \bar{z}_k \right) dx.$$

Ştiind că $f(t)$ este funcţie de tip pozitiv, rezultă

$$I \geqslant 0,$$

adică şi $\varphi(t)$ este de tip pozitiv; şi cum

$$\lim_{t \to 0} \varphi(t) = F'(0) = f(0) = 1, \quad \text{unde} \quad F(x) = \int_0 f(t)\, dt,$$

rezultă că φ este funcţie caracteristică.

26. Dacă $(\varphi_n(t))_n$ este un şir de funcţii caracteristice şi dacă

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t),$$

cu $\varphi(t)$ continuă, atunci funcţia $\varphi(t)$ este funcţie caracteristică.

Soluție. $\varphi_n(t)$ fiind funcție caracteristică este funcție de tip pozitiv; deci

$$\sum_k \sum_j \varphi_n(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geqslant 0.$$

Făcînd limita după n, inegalitatea se păstrează

$$\sum_k \sum_j \varphi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geqslant 0,$$

ceea ce arată că $\varphi(t)$ este funcție de tip pozitiv. Din condiția enunțului rezultă că

$$\varphi(0) = 1$$

și deci $\varphi(t)$ este funcție caracteristică.

27. Să se arate că dacă $\varphi(t)$ este funcție caracteristică și funcția $\psi(t)$ este continuă cu proprietatea că pentru un șir $(h_n)_n$ produsul

$$\varphi(t) \cdot \psi(h_n t) = f_n(t)$$

este funcție caracteristică, atunci $\psi(t)$ este funcție caracteristică,

Soluție. Funcțiile $\varphi(t)$ și $f_n(t)$ fiind funcții caracteristice, le asociem variabilele aleatoare ξ și ζ_n, independente. Să notăm

$$\xi + \tau_{l_n} = \zeta_n;$$

variabilelor ξ, τ_{l_n} și ζ_n le corespund funcțiile caracteristice $\varphi(t)$, $\psi_n(t)$ și $f_n(t)$, între care avem relația

$$\varphi(t) \cdot \psi_n(t) = f_n(t).$$

Rezultă că $\psi(h_n t)$ este funcție caracteristică și că

$$\psi(h_n t) = \psi_n(t).$$

Să luăm șirul $(h_n)_n$ convergent către 1; deducem că

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(t) = \psi(t), \quad \psi(0) = 1.$$

și $\psi(t)$ este funcție caracteristică.

28. Fie $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$, ... un șir de funcții caracteristice și C_1, C_2, ..., C_n, ... un șir de constante cu proprietățile

$$C_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$\sum C_i = 1.$$

Să se arate că funcția

$$\varphi(t)=\sum_{l=1}^{\infty} C_l \varphi_l(t)$$

este o funcție caracteristică.

Soluție. Pentru aceasta vom demonstra că funcția $\varphi(t)$ verifică următoarele proprietăți:

1) $|\varphi(t)|\leqslant 1$,
2) $\varphi(0)=1$,
3) $\varphi(t)$ este de tip pozitiv.

Se observă că

$$|\varphi(t)|\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}|C_l\varphi_l(t)|\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}C_l=1$$

și

$$\varphi(0)=\sum_{l=1}^{\infty}C_l\varphi_l(0)=1.$$

Să arătăm acum că $\varphi(t)$ este o funcție de tip pozitiv. Avem

$$\sum_{l,j} f(t_l-t_j)\,a_l\bar{a}_j=\sum_{h=1}^{\infty}\Big(\sum_{l,j}C_h\varphi_h(t_l-t_j)\,a_l\bar{a}_j\Big)=$$

$$=\sum_{h=1}^{\infty}C_h\Big(\sum_{l,j}\varphi_h(t_l-t_j)\,a_l\bar{a}_j\Big)\geqslant 0$$

și deci $\varphi(t)$ este o funcție caracteristică.

29. Teorema lui Pólya. Fie $\varphi(t)$ o funcție pozitivă, pară, continuă și convexă, astfel încît

1) $\varphi(0)=1$
2) $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=0$.

Să se arate că $\varphi(t)$ este funcție caracteristică.

Soluție. Se știe că o funcție continuă și convexă este funcție de tip Lipschitz și că se poate scrie

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\int_0^t\psi(t)\,dt,$$

unde $\psi(t)$ nu este descrescătoare, $\psi(t)\to 0$ cînd $t\to\infty$ și $\psi(t)=\varphi'(t)$ aproape peste tot. Să examinăm funcția $\varphi(t)$ pentru $t>0$. Dacă $\varphi(y)=0$ pentru $y>0$, atunci $\varphi(t)=0$ pentru $t\geqslant y$, după cum rezultă

din proprietăţile funcţiei $\varphi(t)$. Dacă însă nu se anulează nicăieri, atunci să facem următoarea construcţie: în fiecare segment $[n, n+1]$ să alegem punctul t_n astfel, încît $\varphi'(t_n)$ să existe şi $\varphi'(t_n)<0$ (dacă astfel de puncte nu există, atunci $\varphi(t)=0$ pentru $t>n+1$, ceea ce contrazice ipoteza). În punctul $(t_n, \varphi(t_n))$ ducem tangenta la graficul funcţiei $\varphi(t)$ şi o prelungim pînă la intersecţia cu axa $t>0$, în punctul T_n. Construim o nouă funcţie $\varphi_n(t)$, al cărei grafic coincide cu graficul funcţiei $\varphi(t)$ pentru $t\leqslant t_n$, cu tangenta pentru $t_n\leqslant t\leqslant T_n$ şi cu axa $t>0$ pentru $t\geqslant T_n$; pentru $t<0$ se ia construcţia simetrică. Se vede că funcţia $\varphi_n(t)$ are aceleaşi proprietăţi cu funcţia $\varphi(t)$.

Dacă acum $\varphi(t)$ se anulează pentru $|t|\geqslant T$, atunci luăm toţi termenii $\varphi_n(t)$ egali cu $\varphi(t)$.

Să examinăm transformatele Fourier ale funcţiilor $\varphi_n(t)$

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T_n}^{T_n} e^{-itx}\varphi_n(t)\,dt$$

şi să arătăm că $f_n(x)\geqslant 0$, oricare ar fi x. Pentru $x=0$, lucrul este evident; cum funcţia $f_n(x)$ este funcţie pară este suficient să arătăm pentru $x>0$. Avem

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{T_n}\cos tx\,\varphi_n(t)\,dt=-\frac{1}{\pi}\frac{\sin tx}{x}\varphi_n(t)\Big|_0^{T_n}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{T_n}\frac{\sin tx}{x}\varphi_n'(t)\,dt=-\int_0^{T_n}\frac{\sin tx}{x}\varphi_n'(t)\,dt.$$

Aici $\varphi_n'(t)<0$, fiindcă $\varphi_n(t)$ are aceleaşi proprietăţi cu $\varphi(t)$.

Descompunem integrala pe segmentele

$$\left[0, \frac{\pi}{x}\right], \quad \left[\frac{\pi}{x}, \frac{2\pi}{x}\right], \ldots;$$

deducem că

$$f_n(x)=\int_0^{\frac{\pi}{x}}\sin tx\left[-\varphi_n'(t)-\varphi_n'\left(t+\frac{\pi}{x}\right)-\varphi_n'\left(t+\frac{2\pi}{x}\right)\ldots\right]dt;$$

cum termenii din paranteză sînt negativi şi $\sin tx$ este pozitiv pe segmentul $\left[0, \frac{\pi}{x}\right]$, rezultă că $f_n(x) \geqslant 0$ pentru orice x. Atunci f_n este sumabilă pe dreaptă şi rămîne să arătăm că

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1.$$

Din formula de inversiune rezultă că

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_n(x)\,dx.$$

Atunci pentru $t=0$,

$$\varphi_n(0) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx,$$

deci $f_n(x)$ este densitate de probabilitate şi $\varphi_n(t)$ funcţia caracteristică corespunzătoare. Cum pentru $n \to \infty$ şirul $\varphi_n(t)$ converge către funcţia continuă $\varphi(t)$, $\varphi(t)$ este de asemenea funcţie caracteristică.

30. Să se arate că dacă o funcţie caracteristică are modulul egal cu unitatea este de forma $e^{i\alpha t}$, (α real).

Soluţie. Din definiţia funcţiei caracteristice rezultă că

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x).$$

Prin ipoteză $|\varphi(t)| = 1$ pentru orice t; atunci, pentru $u \neq 0$,

$$\varphi(u) = e^{ia}$$

şi

$$1 = \varphi(u)e^{-ia} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ux-a)}\,dF(x);$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(ux-a)]\,dF(x) - i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ux-a)\,dF(x) = 0.$$

Rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(ux-a)\,dF(x) = 0 \quad \text{şi} \quad \int_{-\infty}^{\infty} [1-\cos(ux-a)]\,dF(x) = 0,$$

de unde deducem că $F(x)$ este funcție în scară, cu salturi în punctele în care

$$ux-a=2k\pi,$$

adică, în punctele

$$x_k=\frac{2k\pi+a}{u} \qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \qquad (*)$$

Rezultă că funcția caracteristică este de forma

$$\varphi(t)=\sum_k e^{itx_k}p_k,$$

unde

$$\sum_k p_k=1, \quad p_k\geqslant 0.$$

Inlocuind x_k prin valorile (*), avem

$$\varphi(t)=\sum_k e^{it\frac{2k\pi+a}{u}}p_k$$

și

$$\varphi(t)=e^{it\frac{a}{u}}\sum_k e^{i\frac{t}{u}2k\pi}p_k=e^{ita}$$

$\left(\text{deoarece } e^{t2k\pi\frac{t}{u}}=\cos 2k\pi\frac{t}{u}+i\sin 2k\pi\frac{t}{u}=(\cos 2k+i\sin 2k)^{\frac{t}{u}}=1\right)$.

31. Să se arate că dacă $\varphi(t)$ este o funcție caracteristică întreagă și dacă

$$\varphi(t)=g(t)\,h(t),$$

unde $g(t)$ și $h(t)$ sînt funcții caracteristice, atunci $g(t)$ și $h(t)$ sînt de asemenea întregi.

Soluție. Vom presupune că funcțiile $\varphi(t)$, $g(t)$, $h(t)$ corespund respectiv variabilelor aleatoare ξ, η, ζ pe care le presupunem independente și că variabila ζ are pe zero ca mediană, adică:

$$P(x;\ \zeta(x)\leqslant 0)=\frac{1}{2},$$

$$P(x;\ \zeta(x)\geqslant 0)=\frac{1}{2}.$$

Egalitatea din enunț arată că între variabile ξ, η, ζ avem relația

$$\xi=\eta+\zeta.$$

Vom nota cu F, G, H funcțiile de repartiție ale celor trei variabile; cum $\eta \leqslant a$, $\zeta \leqslant 0$ implică $\xi \leqslant a$, avem

$$\{x;\ \eta(x) \leqslant a,\ \zeta(x) \leqslant 0\} \subset \{x;\ \xi(x) \leqslant a\}.$$

Rezultă că

$$G(a)\frac{1}{2} \leqslant F(a)$$

și la fel

$$\frac{1}{2}(1-G(a)) \leqslant 1-F(a).$$

Vom arăta că funcția caracteristică $g(t)$ este întreagă.

Prin definiție funcția caracteristică a variabilei η este

$$g(t) = \int e^{itx}\, dG(x)$$

care se poate transcrie, integrînd prin părți, sub forma

$$g(t) = 1 - it\int_{-\infty}^{0} e^{itx} G(x)\, dx + it\int_{0}^{\infty} e^{-itx}(1-G(x))\, dx.$$

Integrala

$$\int_{-\infty}^{0} e^{itx} G(x)\, dx$$

se poate dezvolta în serie, astfel încît

$$\int_{-\infty}^{0} e^{itx} G(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \int_{-\infty}^{0} x^n G(x)\, dx \leqslant 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \int_{-\infty}^{0} x^n F(x)\, dx$$

(deoarece $G(x) \leqslant 2F(x)$).

Seria din membrul al doilea al inegalității este seria întreagă corespunzătoare funcției caracteristice $f(t)$.

La fel rezultă că

$$\int_{0}^{\infty} e^{-itx}(1-G(x))\, dx$$

reprezintă o funcție întreagă, deci $g(t)$ este o funcție întreagă.

32. Să se arate că dacă $\varphi(t) = 1 + \theta(t^2)$, unde

$$\lim_{t\to 0} \frac{\theta(t^2)}{t^2} = 0, \qquad (*)$$

atunci $\varphi(t) \equiv 1$.

Soluție. Din condițiile enunțului rezultă că $1-\varphi(t)=\theta(t^2)$ are proprietatea (*); atunci și partea reală și cea imaginară au proprietatea (*). Partea reală este formată din

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF(x)$$

și deci

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF(x)=0;$$

cu atît mai mult

$$\lim\frac{1}{t^2}\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}}(1-\cos tx)\,dF(x)=0.$$

Cum din ultima integrală rezultă

$$|x|\leqslant\frac{1}{t}$$

sau

$$-1\leqslant tx\leqslant 1,$$

atunci există $\alpha>0$, astfel încît

$$\frac{1-\cos tx}{t^2}\geqslant\alpha x^2$$

$$0\leqslant\alpha\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,dF(x)\leqslant\lim_{t\to 0}\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}}\frac{1-\cos tx}{t^2}\,dF(x)=0.$$

Rezultă de aici că

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x)=0$$

și deci $F(x)=\varepsilon$ (adică obținem repartiția care plasează în origine masa $+1$ și în celelalte puncte masa nulă).

33. Fie ξ variabila aleatoare definită prin

$$\begin{pmatrix} \dots -n \dots -3 -2\ 2\ 3 \dots\ n \dots \\ \dots\ p_n \cdots\ p_3\ p_2\ p_2\ p_3 \cdots p_n \cdots \end{pmatrix},$$

unde $p_n = \frac{C}{n^2 \ln n}$ (C este o constantă pentru care $C\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} = \frac{1}{2}$).

Să se arate că funcţia caracteristică a variabilei ξ este diferenţiabilă şi $M(\xi)$ nu există.

Soluţie. Funcţia caracteristică a variabilei ξ este

$$\varphi(t) = C\sum_{n=2}^{\infty} (e^{itn} + e^{-itn}) \frac{1}{n^2 \ln n} = C\sum_{n=2}^{\infty} \cos nt \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

Pentru $\varphi'(t)$, avem

$$\varphi'(t) = -C\sum_{n=2}^{\infty} \sin nt \frac{1}{n \ln n}$$

şi este o serie Fourier, convergentă pentru orice t. In particular, $\varphi'(0) = 0$, în timp ce seria $\sum_{n=2} n \frac{1}{n^2 \ln n}$ este divergentă şi deci $M(\xi)$ nu există.

Observaţie. Acest exerciţiu este un contraexemplu pentru proprietatea de la pct. 2 p. 190 a funcţiei caracteristice.

34. Să se arate că pentru $u > 0$ avem

$$\int_{|x| < \frac{1}{u}} x^2 dF(x) \leqslant \frac{3}{u^2} \{\varphi(0) - \mathrm{Re}(\varphi(u))\},$$

unde $\varphi(u)$ este funcţia caracteristică corespunzătoare distribuţiei $F(x)$.

Soluţie. Se observă că dezvoltînd în serie pe $\cos ux$, avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos ux)\, dF(x) \geqslant \int_{|x| < \frac{1}{u}} \frac{u^2x^2}{2}\left(1 - \frac{u^2x^2}{12}\right) dF(x) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{11u^2}{24} \int_{|x| < \frac{1}{u}} x^2 dF(x),$$

de unde

$$\int\limits_{|x|<\frac{1}{u}} x^2 dF(x) \leqslant \frac{3}{u^2} \int (1-\cos ux)\, dF(x).$$

Insă

$$\int (1-\cos ux)\, dF(x) = \varphi(0) - \operatorname{Re}(\varphi(u))$$

şi deci

$$\int\limits_{|x|<\frac{1}{u}} x^2 dF(x) \leqslant \frac{3}{u^2} \{\varphi(0) - \operatorname{Re}(\varphi(u))\}.$$

35. Să se arate că pentru orice $-\infty < x < +\infty$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} e^{-iux} \varphi(u)\, du = F(x+0) - F(x-0),$$

unde $\varphi(u)$ şi $F(x)$ sînt respectiv funcţia caracteristică şi funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare ξ.

Soluţie. Din definiţia funcţiei caracteristice avem

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} e^{-iux} \varphi(u)\, du = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-T}^{T} e^{iu(y-x)} du \right) dF(y).$$

Insă

$$\int\limits_{-T}^{T} e^{iu(y-x)} du = \frac{e^{iT(y-x)} - e^{-iT(y-x)}}{i(y-x)}.$$

Folosind formulele lui Euler, rezultă că

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} e^{-iux} \varphi(u)\, du = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(y-x)}{T(y-x)}\, dF(y).$$

Insă,

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(y-x)}{T(y-x)}\, dF(y) = F(x+0) - F(x-0)$$

şi deci

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} e^{-iux} \varphi(u)\, du = F(x+0) - F(x-0).$$

36. Să se arate că dacă $\varphi(u)$ este funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare, atunci pentru orice u, h reali,

$$|\varphi(u) - \varphi(u+h)|^2 \leqslant 2\varphi(0)\{\varphi(0) - \operatorname{Re}(\varphi(h))\}.$$

Soluție. Avem

$$\varphi(u)-\varphi(u+h)=\int e^{iux}\mathrm{d}F(x)-\int e^{i(u+h)x}\,\mathrm{d}F(x)=\int e^{iux}(1-e^{ihx})\,\mathrm{d}F,$$

de unde

$$|\varphi(u)-\varphi(u+h)|^2=\left|\int e^{iux}(1-e^{ihx})\,\mathrm{d}F(x)\right|^2.$$

Aplicînd inegalitatea lui Schwartz, rezultă

$$|\varphi(u)-\varphi(u+h)|^2\leqslant\int \mathrm{d}F(x)\int|1-e^{ihx}|^2\,\mathrm{d}F(x)\leqslant$$

$$\leqslant 2\varphi(0)\int(1-\cos hx)\,\mathrm{d}F(x).$$

Cum

$$\int(1-\cos hx)\,\mathrm{d}F(x)=\varphi(0)-\mathrm{Re}\,(\varphi(h),$$

rezultă că

$$|\varphi(u)-\varphi(u+h)|^2\leqslant 2\varphi(0)\{\varphi(0)-\mathrm{Re}\,(\varphi(h))\}.$$

37. Fie $\varphi(t)=\frac{1-a}{1-ae^{it}}$ $(0<a<1)$, $-\infty<t<+\infty$.

Să se arate că $f(t)$ este o funcție caracteristică a unei variabile indefinit divizibile.

Soluție. Dezvoltînd în serie, avem

$$\varphi(t)=(1-a)(1+ae^{it}+a^2e^{2it}+\ldots).$$

Pentru variabila aleatoare care ia valorile a_l cu probabilitățile p_l $(l=1, 2, \ldots)$, funcția caracteristică este

$$\varphi(t)=\sum_l p_l e^{ia_l t}\ .$$

Rezultă că

$$a_l=l-1,\quad p_l=a^{l-1}(1-a).$$

și deci $f(t)$ este funcție caracteristică.

Pentru a arăta că $f(t)$ este funcția caracteristică a unei variabile indefinit divizibile, trebuie să arătăm că

$$f^{1/n}(t)$$

este funcție caracteristică. Avem

$$f^{1/n}(t)=(1-a)^{1/n}(1-ae^{it})^{-\frac{1}{n}}=$$

$$=(1-a)^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}ae^{it}+\frac{1}{2!}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)a^2e^{2it}+\ldots\right).$$

Ca și mai sus, variabila aleatoare se obține luînd

$$a_l=l-1 \quad \text{și} \quad p_l=(1-a)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{(l-1)!}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)\dots\left(\frac{1}{n}+l-1\right)a^{l-1}.$$

38. Folosind identitatea lui Euler,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=Z(s),$$

unde p sînt toate numerele prime ($p\neq 1$); notînd $s=\sigma+it\,(\sigma\geqslant 1)$ și

$$f(t)=\frac{Z(\sigma+it)}{Z(\sigma)}, \tag{1}$$

să se arate că $f(t)$ este o lege de repartiție indefinit divizibilă.

Soluție. Să dezvoltăm în serie

$$\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}=\prod_p(1+p^{-s}+p^{-2s}+\dots), \tag{2}$$

unde

$$p^{-s}=\frac{1}{p^{\sigma}\cdot p^{it}} \quad \text{și} \quad |p^{-s}|<1.$$

Logaritmînd (1), obținem

$$\ln f(t)=\ln Z(\sigma+it)-\ln Z(\sigma);$$

ținînd seamă de (2),

$$\ln Z(\sigma+it)=-\sum_p\ln(1-p^{-s}).$$

Dezvoltînd în serie, avem:

$$\ln Z(\sigma+it)=\sum_p\left(p^{-s}+\frac{1}{2}p^{-2s}+\frac{1}{3}p^{-3s}+\dots\right)=\sum_p\sum_n\frac{1}{n}p^{-ns}$$

și

$$\ln f(t)=\sum_p\sum_n\frac{1}{n}(p^{-ns}-p^{-n\sigma}).$$

39. Se dau două variabile independente ξ_1 și ξ_2 cu distribuții de tip Cauchy

$$dF_i=\frac{dx_i}{\pi(1+x_i^2)}, \quad i=1,\ 2 \qquad (-\infty<x_i<\infty).$$

Se cere funcția de repartiție a sumei $\xi_1+\xi_2$.

Soluție. Deoarece funcția caracteristică a sumei de două variabile independente este egală cu produsul funcțiilor caracteristice, avem, notînd $\zeta=\xi_1+\xi_2$ și ρ_ζ densitatea,

$$\rho_\zeta=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(z-x_2)^2}\cdot\frac{1}{1+x_2^2}\,dx_2=\frac{2}{\pi(z^2+2^2)}.$$

Problema se generalizează pentru sume de n variabile Cauchy independente $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Pentru $\zeta=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, se obține, pentru orice n,

$$\rho(z)=\frac{n}{\pi(z^2+n^2)},$$

rezultat care se stabilește folosind principiul inducției.

Pentru $n+1$ variabile independente, avem

$$\rho(z+1)=\frac{n}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+(z-x_{n+1})^2}\cdot\frac{1}{1+x_{n+1}^2}\,dx_{n+1}=$$

$$=\frac{n}{\pi}\cdot\frac{\frac{n+1}{n}}{z^2+(n+1)^2}=\frac{n+1}{\pi(z^2+(n+1)^2)}.$$

40. Să se calculeze funcția caracteristică a variabilei bidimensionale (ξ_1, ξ_2) cu distribuția normală, dată prin densitatea

$$\rho(x, y)=\frac{1}{2\pi(1-r^2)}\cdot e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}}.$$

Soluție. Pentru o variabilă aleatoare bidimensională (ξ_1, ξ_2), funcția caracteristică este definită prin

$$\varphi(t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1x+t_2y)}\,dF(x, y).$$

Pentru repartiția dată, avem

$$\varphi(t_1, t_2)=\frac{1}{2\pi(1-r^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1x+t_2y)-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}}\,dx\,dy.$$

Făcînd schimbările de variabile corespunzătoare, se obține

$$\varphi(t_1, t_2)=\frac{1}{2\pi}\iint e^{i((t_2r+t_2)v+t_1\sqrt{1-r^2})-\frac{u^2+v^2}{2}}\,du\,dv$$

sau încă

$$\varphi(t_1,\ t_2)=e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+2rt_1t_2+t_2^2)}\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\iint e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\,du\,dv\right).$$

Valoarea factorului din paranteză fiind egală cu unitatea, rezultă

$$\varphi(t_1,\ t_2)=e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+2rt_1t_2+t_2^2)}.$$

41. Dacă $f(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ este funcția caracteristică a variabilei aleatoare cu n dimensiuni $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$, atunci funcția caracteristică a sumei $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ este

$$\varphi(t)=\varphi(t,\ t,\ t,\ \ldots,\ t).$$

Soluție. Din definiția funcției caracteristice rezultă că

$$\varphi(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)=\iint\ldots\int e^{i(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}\,dF(x_1,\ \ldots,\ x_n). \qquad (1)$$

Dacă notăm cu η variabila aleatoare

$$\eta=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n,$$

funcția ei caracteristică este

$$\varphi(t)=\iint\ldots\int e^{it(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\,dF(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n). \qquad (2)$$

Comparînd cele două rezultate (1) și (2), rezultă că

$$\varphi(t)=\varphi(t,\ t,\ \ldots,\ t).$$

42. Știind că variabila bidimensională (ξ_1, ξ_2) are repartiție normală cu densitatea

$$p(x,\ y)=\frac{1}{2\pi(1-r^2)}e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}},$$

să se determine funcția caracteristică a sumei $\xi_1+\xi_2$.

Soluție. Să aplicăm exercițiul precedent; știind că funcția caracteristică a variabilei $(\xi_1,\ \xi_2)$ este

$$\varphi(t_1, t_2)=e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+2rt_1t_2+t_2^2)},$$

pentru variabila sumă $\xi_1+\xi_2$ vom avea funcția caracteristică

$$\varphi(t)=\varphi(t,\ t)=e^{-t^2(1+r)}.$$

43. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ k variabile aleatoare independente care iau aceleaşi valori cu aceleaşi probabilităţi, şi anume valoarea m (întreg şi pozitiv) cu probabilitatea $P(m)=(1-q)q^m$, unde $q<1$.

Să se calculeze funcţia de repartiţie a variabilei $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k$.

Soluţie. Vom folosi funcţia caracteristică. Ştim că funcţia caracteristică a variabilei ξ este

$$\varphi(t)=M(e^{itm})=\sum_m e^{itm}(1-q)q^m=(1-q)\sum_m e^{itm}q^m=\frac{1-q}{1-qe^{it}}.$$

Funcţia caracteristică $\varphi_k(t)$ a variabilei $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k$ este egală cu

$$\varphi_k(t)=(1-q)^k(1-qe^{it})^{-k}=(1-q)^k\sum_m(-1)^m\frac{-k\cdot(-k-1)\ldots(-k-m+1)}{1\cdot 2\ldots m}\times$$

$$\times(qe^{it})^m=(1-q)^k\frac{(m+k-1)!}{m!\,(k-1)!}q^me^{itm}.$$

Ţinînd seama de definiţia funcţiei caracteristice, pentru o variabilă aleatoare, rezultă

$$P_k(m)=\frac{(m+k-1)!}{m!\,(k-1)!}(1-q)^kq^m.$$

44. Fie ξ o variabilă aleatoare discretă care ia valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots (x_j\neq x_k,\ j\neq k)$ şi $P(\xi=x_n)=p_n$.

Să notăm cu $\varphi_\xi(t)$ funcţia caracteristică corespunzătoare variabilei ξ. Să se arate că

$$p_n=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_\xi(t)\cdot e^{-itx_n}\,dt.$$

Soluţie. Funcţia caracteristică a variabilei discrete ξ este

$$\varphi_\xi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}p_ne^{ix_nt},$$

seria din membrul al doilea fiind absolut convergentă. Avem

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\varphi_\xi(t)\cdot e^{-ix_nt}\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\sum_{k=1}^{\infty}p_ke^{ix_kt}e^{-ix_nt}dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-T}^{T}p_ke^{i(x_k-x_n)t}\,dt=\lim_{T\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}p_k\int_{-T}^{T}e^{i(x_k-x_n)t}dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{i(x_k-x_n)t}\,dt.$$

Cum

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} e^{i(r_k-x_n)t}\,dt=\begin{cases}1, \text{ dacă } k=n\\ 0, \text{ dacă } k\neq n,\end{cases}$$

rezultă

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\varphi_\xi(t)\,e^{-ix_nt}\,dt=p_n.$$

45. Să se arate că se pot determina variabilele independente ξ_1, ξ_2, ξ_3 astfel ca repartiţiile variabilelor ξ_2, ξ_3 să fie diferite şi funcţiile de repartiţie ale variabilelor $\xi_1+\xi_3$, $\xi_1+\xi_2$ să nu coincidă.

Soluţie. Presupunem că variabilele ξ_1, ξ_2, ξ_3 au densităţile de repartiţie ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Funcţiile caracteristice ale variabilelor $\xi_1+\xi_2$ şi $\xi_1+\xi_3$ sînt

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\cdot\varphi_{\xi_2}(t),$$

$$\varphi_{\xi_1+\xi_3}(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\cdot\varphi_{\xi_3}(t).$$

Prin ipoteză $\rho_2=\rho_3$, deci vom avea şi

$$\varphi_{\xi_2}=\varphi_{\xi_3}.$$

Rezultă, atunci, că pentru fiecare t

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)-\varphi_{\xi_1+\xi_3}(t)=0;$$

folosind definiţia funcţiilor caracteristice, găsim

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(\rho_{\xi_1+\xi_2}-\rho_{\xi_1+\xi_3})\,dx=0$$

de unde, nu rezultă că

$$\rho_{\xi_1+\xi_2}=\rho_{\xi_1+\xi_3}$$

în toate punctele x.

46. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente avînd densităţile de probabilitate $\rho_\xi(x)$, respectiv $\rho_\eta(y)$. Fie $\zeta=\frac{\eta}{\xi}$. Dacă $\varphi(t)$ este funcţia caracteristică a variabilei η şi $\Phi(t)$ a variabilei ζ, să se arate că

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{t}{x}\right)\rho_\xi(x)\,dx.$$

Soluție. Se știe că în aceste condiții ζ are o densitate de probabilitate $\rho_\zeta(z)$ dată de

$$\rho_\zeta(z)=\int |x|\,\rho_\xi(x)\,\rho_\eta(zx)\,dx.$$

De asemenea, știm că

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\zeta(z)\,e^{itz}\,dz=\int\int_{-\infty}^{\infty}e^{itz}\,|x|\,\rho_\xi(x)\,\rho_\eta(zx)\,dxdz.$$

Făcînd schimbarea de variabilă

$$xz=u,\quad x=x,$$

obținem

$$\Phi(t)=\int\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\frac{u}{x}}\rho_\xi(x)\rho_\eta(u)\,dudx=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\xi(x)\,dx\int e^{\frac{it}{x}u}\rho_\eta(u)du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{t}{x}\right)\rho_\xi(x)\,dx.$$

47. In condițiile problemei precedente, să se arate că condiția necesară și suficientă ca $\Phi(t)$ să fie desfășurabilă în serie în jurul originii este ca toate momentele întregi negative ale lui ξ și toate momentele întregi pozitive ale lui η să existe.

Soluție. Să punem

$$m_{jk}=\int\int x^j y^k\,\rho_\xi(x)\,\rho_\eta(y)\,dy.$$

Atunci

$$m_{ok}=\int x^k\,\rho_\xi(x)\,dx;\quad m_{ko}=\int y^k\,\rho_\eta(y)\,dy.$$

Rezultă că

$$\varphi\left(\frac{t}{x}\right)=\int e^{i\frac{t}{x}y}\,\rho_\eta(y)\,dy=\sum_k\frac{(it)^k}{k!}\,\frac{m_{ok}}{x^k},$$

$$\Phi(t)=\sum_k m_{ok}\frac{(it)^k}{k!}\int\frac{\rho_\xi(x)}{x^k}\,dx=\sum_k\frac{(it)^k}{k!}m_{ok}m_{-ko}=\sum\frac{(it)^k}{k!}M_k,$$

de unde se deduce imediat rezultatul cerut.

CONVERGENȚA ȘIRURILOR DE VARIABILE ALEATOARE

Fie $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, ..., $\xi_n(x)$, ..., $x \in E$, un șir de variabile aleatoare definite pe cîmpul de probabilitate $\{E, K, P\}$ și $\xi(x)$ o variabilă aleatoare definită de asemenea pe acest cîmp.

Tipuri de convergențe. 1) Șirul de variabile aleatoare $\{\xi_n(x)\}$ *converge în sensul lui Bernoulli* către $\xi(x)$, dacă funcțiile de repartiție $F_n(a)$ converg către $F(a)$, (funcția de repartiție a variabilei $\xi(x)$) în orice punct $a \in R$ de continuitate a funcției $F(a)$.

2) Șirul de variabile aleatoare $\{\xi_n\}_n$ *converge în probabilitate (sau măsură)* către variabila ξ, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$, există un număr natural $N(\varepsilon, \eta)$, astfel încît

$$P(\{x : |\xi_n(x) - \xi(x)| > \varepsilon\}) < \eta$$

pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon, \eta)$.

Condiția necesară și suficientă pentru ca șirul $\{\xi_n\}$ să conveargă în probabilitate către variabila ξ este următoarea: pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$, există $N(\varepsilon, \eta)$ astfel încît

$$P(\{x : |\xi_n(x) - \xi_m(x)| > \varepsilon\}) < \eta,$$

dacă n, $m \geqslant N(\varepsilon, \eta)$ adică, dacă șirul $(\xi_n)_n$ este șir Cauchy în probabilitate (sau măsură).

3) Șirul de variabile aleatoare $\{\xi_n\}$ *converge aproape singur* către ξ, dacă există o mulțime $E_0 \in K$ cu $P(E_0) = 0$, astfel încît

$$\xi_n(x) \to \xi(x)$$

pentru orice $x \in E - E_0$; prin urmare, dacă $\xi_n(x)$ converge simplu către $\xi(x)$ cu excepția unei mulțimi E_0 de probabilitate nulă.

4) Şirul de variabile aleatoare $\{\xi_n(x)\}$ *converge tare* către $\xi(x)$ dacă, pentru orice $\varepsilon>0$ şi $\eta>0$, există $N(\varepsilon, \eta)$, astfel încît:

$$P\Big(\bigcup_{n\geqslant N(\varepsilon,\eta)}\{x:|\xi_n(x)-\xi(x)|>\varepsilon\}\Big)<\eta.$$

Se vede imediat că relaţia de mai sus este echivalentă cu:

$$P\Big(\bigcap_{n\geqslant N(\varepsilon,\eta)}\{x:|\xi_n(x)-\xi(x)|\leqslant\varepsilon\}\Big)>1-\eta.$$

5) Să presupunem că există integralele

$$\int_E|\xi_n(x)|^r P(dx), \qquad n=1, 2, \ldots$$

şi

$$\int_E|\xi(x)|P(dx).$$

Şirul de variabile aleatoare $\{\xi_n(x)\}$ *converge în medie de ordinul* r (întreg $\geqslant 1$) către $\xi(x)$, dacă

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|\xi_n(x)-\xi(x)|^r P(dx)=0.$$

Legătura dintre aceste tipuri de convergenţă, schematic, este următoarea:

convergenţa aproape sigură $\longleftrightarrow$ convergenţa tare,

convergenţa tare $\rightarrow$ convergenţa în probabilitate,

convergenţa în probabilitate $\rightarrow$ convergenţa în sensul lui Bernoulli,

convergenţa în medie $\rightarrow$ convergenţa în probabilitate.

Menţionăm încă o teoremă de convergenţă.

Fie $\{\xi_n(x)\}$ un şir de variabile aleatoare independente. Să presupunem că momentele

$$m_k=M[\xi_k(x)]; \quad \mu_k^2=M[(\xi_k(x)-m_k)^2]; \quad \rho_k^3=M[|\xi_k(x)-m_k|^3]$$

există pentru fiecare k. Dacă notăm

$$m_{(n)}=\sum_{k=1}^{n}m_k; \quad \mu_{(n)}^2=\sum_{k=1}^{n}\mu_k^2; \quad \rho_{(n)}^3=\sum_{k=1}^{n}\rho_k^3$$

şi

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k(x)$$

şi avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_{(n)}}{\mu_{(n)}} = 0,$$

atunci repartiţia variabilei

$$\frac{s_n - m_{(n)}}{\mu_{(n)}}$$

este gaussiană, cînd n tinde către infinit. Această teoremă poartă numele de *teorema lui Liapunov*.

PROBLEME

1. Fie ξ o variabilă aleatoare şi $M = M(\xi)$. Dacă $\mathcal{M}(\varepsilon) = M(e^{\varepsilon(\xi - M)})$, să se arate că

$$P\left\{\xi \geqslant M + \frac{t + \ln \mathcal{M}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right\} \leqslant e^{-t}.$$

Soluţie. Folosind inegalitatea lui Cebîşev

$$P(|\xi - M| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{M(|\xi - M|^{\alpha})}{\lambda^{\alpha}}$$

pentru $\lambda = \mathcal{M}(\varepsilon)\, e^{t}$, obţinem

$$P(|\xi - M| \geqslant \mathcal{M}(\varepsilon)\, e^{t}) \leqslant e^{-t}.$$

Din şirul de relaţii

$$P(e^{\varepsilon(\xi - M)} \geqslant M(\varepsilon)\, e^{t}) = P(\varepsilon(\xi - M) \geqslant t + \ln \mathcal{M}(\varepsilon)) =$$

$$= P\left(|\xi - M| \geqslant \frac{t + \ln \mathcal{M}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right),$$

rezultă că

$$P\left(M + \frac{t + \ln \mathcal{M}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \leqslant e^{-t}.$$

2. Fie $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt variabile independente şi egal mărginite,

$$|\xi_k| \leqslant K.$$

Fie $M(\xi_k) = 0$,

$$D(\xi_k) = D_k,\ D(\xi) = D,\ M(e^{\varepsilon\xi}) = \mathcal{M}(\varepsilon).$$

Să se arate că

$$\ln \mathcal{H}(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\left(1+\frac{\varepsilon K}{3}e^{\varepsilon K}\right). \qquad (*)$$

Soluție. Variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ fiind independente,

$$\mathcal{H}(\varepsilon)=M(e^{\varepsilon\xi})=\prod_{k=1}^{n} M(e^{\varepsilon\xi_k});$$

pe de altă parte,

$$M(e^{\varepsilon\xi_k})=M\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n\xi_k^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n M(\xi_k^n)}{n!}$$

și ținînd seama de condițiile date

$$M(e^{\varepsilon\xi_k})=1+\frac{\varepsilon^2 D_k^2}{2!}+\ldots$$

Intrucît $|\xi_k|\leqslant K$, urmează că $|\xi_k^n|\leqslant K^{n-2}\xi_k^2$, și pentru $n\geqslant 3$

$$M(\xi_k^n)\leqslant K^{n-2}D_k^2.$$

Deci

$$M(e^{\varepsilon\xi_k})\leqslant 1+\varepsilon^2 D_k^2\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(\varepsilon K)^{n-2}}{n!}\right).$$

Cum

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(\varepsilon K)^{n-2}}{n!}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon K)^r}{r!\,(r+1)\,(r+2)}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon K)^{r+1}}{(r+1)!\,(r+2)\,(r+3)}=$$

$$=\varepsilon K\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon K)^r}{r!}\frac{1}{(r+1)\,(r+2)\,(r+3)}\leqslant\frac{\varepsilon K}{6}e^{\varepsilon K},$$

rezultă

$$M(e^{\varepsilon\xi_k})\leqslant 1+\varepsilon^2 D_k^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon K}{6}e^{\varepsilon K}\right).$$

De aici, obținem

$$M(e^{\varepsilon\xi})=\prod_{k=1}^{n}M(e^{\varepsilon\xi_k})\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(1+\varepsilon^2 D_k^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon K}{6}e^{\varepsilon K}\right)\right).$$

Intrucît $1+x<e^x$, dacă $x>0$ şi $\sum_{k=1}^{n} D_k^2=D^2$, urmează că

$$\mathcal{M}(\varepsilon)=M(e^{\varepsilon\xi})\leqslant\exp\left(\frac{\varepsilon^2D^2}{2}\left(1+\frac{\varepsilon K}{3}e^{\varepsilon K}\right)\right)$$

şi logaritmînd:

$$\ln\mathcal{M}(\varepsilon)\leqslant\frac{\varepsilon^2D^2}{2}\left(1+\frac{\varepsilon K}{3}e^{\varepsilon K}\right).$$

3. Folosind inegalităţile din exerciţiile 1 şi 2 în condiţiile exerciţiului 2 şi notînd

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{2t}}{D},\quad \lambda=\sqrt{2t},\quad \text{şi}\quad \lambda\left(1+\frac{\lambda K}{2D}\right)=\mu,$$

să se arate că

$$P(|\xi|\geqslant\mu D)\leqslant 2e^{-\frac{\mu^2}{2\left(1+\frac{\mu K}{2D}\right)^2}}.$$

Soluţie. Din inegalitatea

$$P\left(\xi\geqslant M+\frac{t+\ln\mathcal{M}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\leqslant e^{-t},$$

majorînd

$$\ln\mathcal{M}(\varepsilon)\leqslant\frac{\varepsilon^2D^2}{2}\left(1+\frac{\varepsilon K}{3}e^{\varepsilon K}\right),$$

rezultă că

$$P\left(\xi\geqslant\frac{t+\frac{\varepsilon^2D^2}{2}\left(1+\frac{\varepsilon K}{3}e^{\varepsilon K}\right)}{\varepsilon}\right)\leqslant e^{-t}.$$

Alegînd pe ε astfel, încît $\varepsilon=\frac{\sqrt{2t}}{D}$, obţinem

$$P\left(\xi\geqslant D\sqrt{2t}\left(1+\frac{K\sqrt{2t}}{6D}e^{\frac{\sqrt{2t}\cdot K}{D}}\right)\right)\leqslant e^{-t}.$$

Dacă notăm $\lambda=\sqrt{2t}$, avem

$$P\left(\xi\geqslant D\lambda\left(1+\frac{\lambda K}{6D}e^{\frac{\lambda K}{D}}\right)\right)\leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Înlocuind pe ξ cu $-\xi$, obţinem

$$P\left(-\xi\geqslant D\lambda\left(1+\frac{\lambda K}{6D}e^{\frac{\lambda K}{D}}\right)\right)\leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{2}}. \qquad (2)$$

Din inegalitățile (1) și (2) rezultă:

$$P\left(|\xi| \geqslant D\lambda\left(1+\frac{\lambda K}{6D}e^{\frac{\lambda K}{D}}\right)\right) \leqslant 2e^{-\frac{\lambda^2}{2}}. \tag{3}$$

Dacă $\frac{\lambda K}{D} \leqslant 1$, atunci

$$e^{\frac{\lambda K}{D}} \leqslant e < 3$$

și

$$\lambda D\left(1+\frac{\lambda K}{6D}e^{\frac{\lambda K}{D}}\right) \leqslant \lambda D\left(1+\frac{\lambda K}{2D}\right).$$

Să notăm, acum,

$$\lambda D\left(1+\frac{\lambda K}{2D}\right) = \mu D;$$

atunci

$$\lambda < \mu \quad \text{și} \quad \mu D \leqslant \lambda D\left(1+\frac{\mu K}{2D}\right),$$

de unde

$$\lambda \geqslant \frac{\mu}{1+\frac{\mu K}{2D}} \quad \text{și} \quad e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \leqslant e^{-\frac{\mu^2}{2\left(1+\frac{\mu K}{2D}\right)^2}}.$$

Înlocuind aceste rezultate în (3), obținem

$$P(|\xi| \geqslant \mu D) \leqslant 2e^{-\frac{\mu^2}{2\left(1+\frac{\mu K}{2D}\right)^2}}.$$

4. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n variabile aleatoare independente și egal mărginite și $M(\xi_k)=M_k$, $D(\xi_k)=D_k$, $|\xi_k - M_k| \leqslant K$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Dacă $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, $M(\xi)=M$ și $D(\xi)=D$, avem

$$P(|\xi - M| \geqslant \mu D) \leqslant 2e^{-\frac{\mu^2}{2\left(1+\frac{\mu K}{2D}\right)^2}},$$

unde μ este oarecare și nu mai mare decît $\frac{D}{K}$.

Soluție. Se aplică exercițiul precedent șirului de variabile aleatoare

$$\zeta_k = \xi_k - M_k$$

care sînt mărginite, independente și pentru care $M(\zeta_k)=0$.

5. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente; să notăm

$$\sigma_n^2=\sigma^2(\xi_n)=M(\xi_n^2); \quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \quad M(S_n)=0;$$

$$s_n^2=\sigma^2(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2.$$

Fie $c=\max\limits_{k\leqslant n}|\xi_k|$ şi $\varepsilon>0$. Să se arate că:

$$P\left(\frac{S_n}{s_n}>\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon c}{2}\right)\right), \tag{1}$$

dacă $\varepsilon c\leqslant 1$ şi

$$P\left(\frac{S_k}{s_n}>\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(-\frac{\varepsilon}{4c}\right), \tag{2}$$

dacă $\varepsilon c\geqslant 1$.

Soluţie. Fie $t>0$, $|\xi|\leqslant c$, $M(\xi)=0$ şi $\sigma^2=\sigma^2(\xi)$. Atunci

$$|M(\xi^n)|\leqslant c^n$$

şi

$$M(e^{t\xi})=1+\frac{t^2}{2}M(\xi^2)+\frac{t^3}{3!}M(\xi^3)+\ldots$$

Ştim însă că

$$e^{t(1-t)}\leqslant 1+t\leqslant e^t$$

şi deci, dacă $tc\leqslant 1$, avem

$$M(e^{t\xi})\leqslant 1+\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1+\frac{tc}{2}+\frac{t^2c^2}{12}+\ldots\right)\leqslant 1+\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1+\frac{tc}{2}\right)$$

sau

$$M(e^{t\xi})\leqslant\exp\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1+\frac{tc}{2}\right)\right).$$

Analog,

$$M(e^{t\xi})\geqslant 1+\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1-\frac{tc}{2}-\frac{t^2c^2}{12}-\ldots\right)\geqslant 1+\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1-\frac{tc}{2}\right)$$

care se mai poate scrie

$$M(e^{t\xi})\geqslant\exp\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}(1-tc)\right).$$

Dacă ţinem seama de cele două inegalităţi, avem

$$\exp\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1-\frac{tc}{2}\right)\right)\leqslant M(e^{t\xi})\leqslant\exp\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\left(1+\frac{tc}{2}\right)\right).$$

Inlocuim în ultimele inegalităţi pe ξ cu $\frac{\xi_k}{s_n}$, apoi notăm $S'=\frac{S_n}{s_n}$; ţinînd seama că variabilele sînt independente, ceea ce înseamnă că

$$M(e^{tS'})=\prod_{k=1}^{n} M\left(\exp\left(\frac{t\xi_k}{s_n}\right)\right),$$

vom obţine

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\left(1-\frac{tc}{2}\right)\right)\leqslant M(e^{tS'})\leqslant\exp\left(\frac{t^2}{2}\left(1+\frac{tc}{2}\right)\right),\quad tc\leqslant 1.$$

Folosind inegalităţile stabilite în exerciţiile 1, 2, 3 rezultă

$$P(S'>\varepsilon)\leqslant e^{-t\varepsilon}M(e^{tS'})\leqslant\exp\left(-t\varepsilon+\frac{t^2}{2}\left(1+\frac{tc}{2}\right)\right).$$

Inlocuind acum pe t cu ε, dacă $\varepsilon c\leqslant 1$, obţinem

$$P(S'>\varepsilon)\leqslant\exp\left(-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1+\frac{\varepsilon c}{2}\right)\right)=\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon c}{2}\right)\right),$$

adică (1).

Pentru $\varepsilon c\geqslant 1$, vom înlocui pe ε cu $\frac{1}{c}$ şi vom obţine, analog, (2).

6. Fie (ξ_n) şi (η_n) două şiruri de variabile aleatoare. Să punem $S_n=\xi_n+\eta_n$. Fie $B_n=M(\xi_n^2)$, $\beta_n=M(\eta_n^2)$, $b_n=M(S_n^2)$.

Să se arate că dacă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{b_n}=0,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{b_n}=1.$$

Soluţie. Din proprietăţile momentelor, rezultă

$$\frac{M(\xi_n^2)}{M(S_n^2)}=\frac{M((S_n-\eta_n)^2)}{M(S_n^2)}=1-2\frac{M(S_n\eta_n)}{M(S_n^2)}+\frac{\beta_n}{b_n}.$$

Folosind inegalitatea lui Schwartz,

$$|M(S_n\eta_n)|\leqslant(M(S_n^2))^{\frac{1}{2}}\cdot(M(\eta_n^2))^{\frac{1}{2}},$$

rezultă că

$$\frac{M(S_n\eta_n)}{M(S_n^2)} \leqslant \left(\frac{\beta_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{de unde} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{b_n}=1.$$

7. Fie μ numărul de realizări a evenimentului A în n observaţii independente şi p probabilitatea evenimentului A în fiecare observaţie. Atunci pentru orice $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

(teorema Bernoulli).

Soluţie. Să notăm cu ξ_k variabila aleatoare care dă numărul de realizări ale evenimentului A în a k-a observaţie

$$\xi_k=\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & q\end{pmatrix}$$

şi

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n.$$

Avem

$$M(\xi_k)=p \quad \text{şi} \quad D(\xi_k)=p\cdot q<\frac{1}{4}\cdot$$

Rezultatul se obţine aplicînd teorema lui Cebîşev.

8. Fie ξ o variabilă aleatoare care ia valorile $0, 1, 2, \ldots, n$, iar

$$P(\xi=k)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\quad n\leqslant M\leqslant N).$$

Să se arate că

$$\lim_{N\to\infty}\frac{D(\xi)}{\sqrt{npq}}=1.$$

Soluţie. Variabila aleatoare ξ urmează distribuţia hipergeometrică. Să calculăm mai întîi valoarea medie. Avem

$$M(\xi)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k\cdot C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=\frac{M\cdot C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{C_{M-1}^r\cdot C_{N-1-(M-1)}^{n-1-r}}{C_{N-1}^{n-1}}$$

sau

$$M(\xi)=\frac{Mn}{N}\cdot$$

Valoarea dispersiei este dată de

$$D^2(\xi)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}-\frac{M^2\cdot n^2}{N^2}.$$

Făcînd calculele, obţinem

$$D^2(\xi)=\frac{Mn}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

Notînd $\frac{M}{N}=p$, $1-p=q$, putem scrie

$$D(\xi)=\sqrt{npq\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)}$$

şi deci

$$\lim_{N\to\infty}\frac{D(\xi)}{\sqrt{npq}}=\lim_{N\to\infty}\sqrt{1-\frac{n-1}{N-1}}=1.$$

9. Dacă (ξ_n) este un şir de variabile aleatoare independente cu dispersie finită şi

$$\int\xi_n dP(x)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(\xi_i)=0,$$

atunci şirul mediilor aritmetice $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ converge în probabilitate către zero.

Soluţie. Dispersia σ^2 fiind omogenă şi aditivă faţă de variabilele independente, rezultă

$$\int\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2 dP=\sigma^2\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(\xi_i).$$

Pentru $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\int\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2 dP=0,$$

adică şirul mediilor aritmetice tinde către zero în medie pătratică şi deci converge către zero şi în probabilitate (deoarece convergenţa în medie pătratică implică convergenţa în probabilitate).

10. Dacă variabilele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ sînt independente şi au şirul dispersiilor $(D(\xi_n))$ mărginit, atunci pentru orice $\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

(teorema Cebişev).

Soluție. Dacă notăm cu

$$\zeta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

atunci

$$D(\zeta_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k).$$

Cum șirul dispersiilor este mărginit, rezultă

$$D(\zeta_n) \leqslant \frac{k}{n}.$$

Aplicînd inegalitatea lui Cebîșev variabilei ζ_n, avem

$$1 \geqslant P\{|\zeta_n - M(\zeta_n)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(\zeta_n)}{\varepsilon^2} \geqslant 1 - \frac{k}{n\varepsilon^2}.$$

Cînd trecem la limită, pentru n, se obține limita de mai sus.

11. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un șir de variabile Poisson independente, $M(\xi_k) = \lambda_k$ și apoi $\beta_k = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$.

Să se arate că dacă $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \lambda$ există, atunci șirul $(\beta_n)_n$ converge în probabilitate către λ.

Soluție. Știm că pentru variabila Poisson ξ_k avem

$$D(\xi_k) = \sqrt{M(\xi_k)};$$

atunci

$$D(\beta_n) = \sqrt{M(\beta_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n}}.$$

Cum

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n} = \lambda,$$

rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} D(\beta_n) = 0.$$

și folosind inegalitatea lui Cebîșev, deducem că

$$\lim_{n \to \infty} P(|\beta_n| > \varepsilon) = 0.$$

12. Să se arate că dacă şirul de variabile aleatoare $(\eta_n)_n$ converge în probabilitate către a, şirul de variabile aleatoare $(\beta_n)_n$ converge în probabilitate către $b\,(b>0)$ şi

$$\beta_n>0, \quad \left|\frac{\eta_n}{\beta_n}\right|\leqslant C,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{\eta_n}{\beta_n}\right)=\frac{a}{b}.$$

Soluţie. Să notăm evenimentele

$$A_{n,\varepsilon}=\{x;\ (\eta_n-a)>\varepsilon\} \quad \text{şi} \quad B_{n,\varepsilon}=\{x;\ (\beta_n-b)>\varepsilon\}.$$

Fie $0<\varepsilon<\frac{b}{2}$ şi $C_{n,\varepsilon}=A_{n,\varepsilon}\cup B_{n,\varepsilon}$; avem

$$M\left(\left|\frac{\eta_n}{\beta_n}-\frac{a}{b}\right|\right)=P(C_{n,\varepsilon})\cdot M_{C_{n,\varepsilon}}\left(\left|\frac{\eta_n}{\beta_n}-\frac{a}{b}\right|\right)+$$

$$+P(\mathbf{C}\,C_{n,\varepsilon})\,M_{\mathbf{C}C_{n,\varepsilon}}\left(\left|\frac{\eta_n}{\beta_n}-\frac{a}{b}\right|\right).$$

Insă

$$P(C_{n,\varepsilon})\leqslant P(A_{n,\varepsilon})+P(B_{n,\varepsilon}) \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\eta_n}{\beta_n}-\frac{a}{b}\right|<C+\left|\frac{a}{b}\right|$$

şi dacă

$$|\eta_n-a|\leqslant\varepsilon \quad \text{şi} \quad |\beta_n-b|\leqslant\varepsilon,$$

atunci

$$M_{\mathbf{C}\,C_{n,\varepsilon}}\left(\left|\frac{\eta_n}{\beta_n}-\frac{a}{b}\right|\right)\leqslant\frac{2\varepsilon\,(|a|+b)}{b^2}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} P(C_{n,\varepsilon})=0$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\left|\frac{\eta_n}{\beta_n}-\frac{a}{b}\right|\right)=0.$$

13. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente care au distribuţie exponenţială şi fie $M(\xi_k)=ck^{\alpha}$, unde $c>0$ şi $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Să se arate că dacă

$$\zeta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n},$$

atunci şirul

$$\zeta_n - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}$$

converge în probabilitate către 0.

Soluţie. Să notăm variabila $\zeta_n - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}$ cu ψ_n; avem

$$M(\psi_n) = M(\zeta_n) - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1} = c \cdot \frac{n^\alpha}{n}\left(\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^\alpha} - \frac{n}{\alpha+1}\right)$$

sau, încă,

$$|M(\psi_n)| \leqslant c \cdot \frac{n^\alpha}{n} \cdot \frac{1}{2};$$

de unde deducem că

$$\lim_{n\to\infty} M(\psi_n) = 0.$$

Ştiind că ξ_k are distribuţie exponenţială cu media ck^α, rezultă că densitatea de repartiţie este

$$\rho_{\xi_k}(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \leqslant 0 \\ \frac{1}{ck^\alpha} e^{-\frac{n}{ck^\alpha}}, & \text{dacă } n > 0 \end{cases}$$

şi

$$M(\xi_k^2) = 2c^2k^{2\alpha}; \quad D^2(\xi_k) = c^2k^{2\alpha}.$$

Pentru variabila ψ_n avem

$$D^2(\psi_n) = D^2\left(\frac{1}{n}\left|\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}\right|\right) =$$

$$= \frac{D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + \ldots + D^2(\xi_n)}{n^2}$$

sau

$$D^2(\psi_n) = \frac{c^2(1^{2\alpha}+2^{2\alpha}+\ldots+n^{2\alpha})}{n^2}.$$

Ştiind că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{2\alpha}+2^{2\alpha}+\ldots+n^{2\alpha}}{n^{2\alpha+1}} = \frac{1}{2\alpha+1}$$

şi că $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} D^2(\psi_n) = c^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1^{2\alpha}+\ldots+n^{2\alpha}}{n^{2\alpha+1}} \cdot \frac{1}{n^{1-2\alpha}} = 0.$$

Deducem, apoi,

$$P(|\psi_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|\psi_n - M(\psi_n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant 4 \cdot \frac{D^2(\psi_n)}{\varepsilon^2},$$

de unde rezultă că şirul ψ_n converge în probabilitate către zero.

14. Fie $f(x)$ şi $g(x)$ funcţii continue definite pe $[0,1]$ şi $0 \leqslant f(x) < C \cdot g(x)$, unde C este o constantă pozitivă.

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{g(x_1) + \dots + g(x_n)} \, dx_1 \dots dx_n = \frac{\int_0^1 f(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt}.$$

Soluţie. Fie variabilele $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ cu valori în $[0,1]$; formăm variabilele

$$\eta_n = \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n}, \qquad \beta_n = \frac{g(\xi_1) + g(\xi_2) + \dots + g(\xi_n)}{n}.$$

Cum $M(f(\xi_k)) = \int_0^1 f(t)\,dt$ şi $M(g(\xi_k)) = \int_0^1 g(t)\,dt$, aplicînd şirurilor de variabile aleatoare (η_n) şi (β_n) legea numerelor mari, rezultă că primul şir este convergent în probabilitate către $\int_0^1 f(t)\,dt$, iar al doilea către $\int_0^1 g(t)\,dt$.

Aplicînd exerciţiul 12 şirurilor η_n şi β_n şi ţinînd seamă să avem distribuţiile cu n dimensiuni în hipercubul unitate din spaţiul R^n, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{\eta_n}{\beta_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{g(x_1) + \dots + g(x_n)} \, dx_1 \dots dx_n = \frac{\int_0^1 f(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt}.$$

15. Să se arate că dacă şirul $(\xi_n)_n$ converge în probabilitate către A şi $|\xi_n| \leqslant K$ pentru $(n = 1, 2, \dots)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} M(\xi_n) = A.$$

Soluție. Să notăm cu $A_{n,\varepsilon}=\{x;\ |\xi_n-A|<\varepsilon\}$; atunci

$$M(|\xi_n-A|)=P(A_{n,\varepsilon})\cdot M_{A_{n,\varepsilon}}(|\xi_n-A|)+P(\mathbb{C}A_{n,\varepsilon})\cdot M_{\mathbb{C}A_{n,\varepsilon}}(|\xi_n-A|).$$

Cum

$$|\xi_n-A|\leqslant 2k \quad \text{şi} \quad M_{A_{n,\varepsilon}}(|\xi_n-A|)\leqslant \varepsilon\cdot P(A_{n,\varepsilon})\leqslant \varepsilon,$$

rezultă

$$M(|\xi_n-A|)\leqslant \varepsilon+2k\cdot P(|\xi_n-A|\geqslant\varepsilon).$$

Insă

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n-A|\geqslant\varepsilon)=0 \quad \text{şi} \quad \varepsilon>0$$

este arbitrar; deci

$$\lim_{n\to\infty} M(|\xi_n-A|)=0.$$

16. Fie $(\xi_n)_n$ un şir de variabile aleatoare, fiecare avînd valoarea medie 0; fie $\eta_n=\dfrac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$.

Să se arate că condiția necesară şi suficientă pentru ca şirul (η_n) să conveargă în probabilitate către zero este ca

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right)=0.$$

Soluție. Să arătăm mai întîi că această condiție este suficientă. Aplicînd inegalitatea

$$P(|\xi-M|\geqslant\lambda D)\leqslant\frac{M^a}{(\lambda D)^a},$$

pentru $a=1$ şi $\varepsilon>0$, avem

$$P\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\geqslant\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right)\leqslant M\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right)\cdot\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\geqslant\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right)=0.$$

Cum

$$P\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\geqslant\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right)=P(\eta_n^2\geqslant\varepsilon^2)=P(|\eta_n|\geqslant\varepsilon),$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Pentru a demonstra necesitatea, presupunem că

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n| \geqslant \varepsilon) = 0. \qquad (*)$$

Să notăm cu $A_\delta = \{x;\ |\eta_n| \geqslant \delta\}$, unde $\delta > 0$; din definiția valorii medii condiționate avem descompunerea

$$M(\eta_n) = P(A_\delta) \cdot M_{A_\delta}(\eta_n) + P(\mathbf{C}A_\delta) \cdot M_{\mathbf{C}A_\delta}(\eta_n)$$

sau

$$M\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right) = P(A_\delta) \cdot M_{A_\delta}\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right) + P(\mathbf{C}A_\delta) \cdot M_{\mathbf{C}A_\delta}\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right) \qquad (**)$$

deoarece

$$\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} \leqslant 1.$$

Avem

$$M_{A_\delta}\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right) \leqslant 1$$

și inegalitatea

$$\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2} \leqslant \eta_n^2$$

implică

$$M_{\mathbf{C}A_\delta}\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right) \leqslant M_{\mathbf{C}A_\delta}(\eta_n^2) \leqslant \delta^2.$$

Înlocuind în (**) obținem

$$M\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right) \leqslant P(A_\delta) + \delta^2.$$

Din relația (*) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(A_\delta) = 0$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right) \leqslant \delta^2;$$

cum δ este arbitrar, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right)=0.$$

17. Să se arate că dacă

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n<x)=F(x),$$

unde $F(x)$ este o funcție de repartiție continuă, și dacă șirul de variabile aleatoare pozitive $(\eta_n)_n$ converge în probabilitate către 1, atunci

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\eta_n}<x\right)=F(x).$$

Soluție. Pentru $\varepsilon>0$, să notăm $A_{n,\varepsilon}=\{|\eta_n-1|>\varepsilon\}$ și $B_n=\left\{\frac{\xi_n}{\eta_n}<x\right\}$; atunci

$$P(B_n)=P(A_{n,\varepsilon})\cdot P_{A_{n,\varepsilon}}(B_n)+P(\mathbb{C}A_{n,\varepsilon})\cdot P_{\mathbb{C}A_{n,\varepsilon}}(B_n).$$

Cum pe mulțimea $A_{n,\varepsilon}$, $\eta_n(t)>1+\varepsilon$ sau $\eta_n(t)<1-\varepsilon$, rezultă

$$P(\xi_n<x(1-\varepsilon))\leqslant P_{A_{n,\varepsilon}}(B_n)\leqslant P(\xi_n<x(1+\varepsilon));$$

însă

$$\lim_{n\to\infty} P(A_{n,\varepsilon})=1$$

și

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathbb{C}A_{n,\varepsilon})=0,$$

deoarece

$$\liminf_{n\to\infty} P_{A_{n,\varepsilon}}(B_n)\leqslant\liminf_{n\to\infty} P(B_n)\leqslant\limsup_{n\to\infty} P(B_n)\leqslant\limsup_{n\to\infty} P_{A_{n,\varepsilon}}(B_n).$$

Rezultă că

$$F(x(1-\varepsilon))\leqslant\liminf_{n\to\infty} P(B_n)\leqslant\limsup_{n\to\infty} P(B_n)\leqslant F(x(1+\varepsilon)).$$

Cum ε este arbitrar, rezultă că șirul $P(B_n)$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\eta_n}<x\right)=F(x).$$

18. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare cu valori medii şi dispersii finite şi care îndeplineşte următoarele condiţii:

1) $M(\xi_k)=M_k$ există pentru orice k;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M_1+M_2+\ldots+M_n}{n}=M$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} D^2(\xi_k)=0$;

4) $R(\xi_i, \xi_j)\leqslant 0$, dacă $i\neq j$.

(R fiind coeficientul de corelaţie al variabilelor ξ_i şi ξ_j). Fie

$$\zeta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

Să se arate că în aceste condiţii şirul $\dfrac{\zeta_n}{n}$ converge în probabilitate către M.

Soluţie. Vom arăta că pentru şirul $\dfrac{\zeta_n}{n}$, şirul $D^2\left(\dfrac{\zeta_n}{n}\right)$ converge către zero. Avem

$$D^2\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D^2(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}M_2(\xi_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}M(\xi_i, \xi_j)-\sum_{k=1}^{n}(M(\xi_k))^2-\right.$$

$$\left.-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}M(\xi_i)\cdot M(\xi_j)\right\}.$$

De aici deducem

$$D^2\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k}D^2(\xi_k)+2[M(\xi_i, \xi_j)-M(\xi_i)\cdot M(\xi_j)]\right\}.$$

Notînd coeficientul de corelaţie al variabilelor ξ_i, ξ_j prin $R(\xi_i, \xi_j)$, ştim că

$$R(\xi_i, \xi_j)=\frac{M(\xi_i, \xi_j)-M(\xi_i)\cdot M(\xi_j)}{D(\xi_i)\cdot D(\xi_j)}$$

şi deducem că

$$D^2\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k}D^2(\xi_k)+2R(\xi_i, \xi_j)\cdot D(\xi_i)\cdot D(\xi_j)\right\}.$$

Ştiind că

$$R(\xi_i, \xi_j)\leqslant 0 \text{ pentru } i\neq j,$$

$$0 \leqslant D^2\left(\frac{\zeta_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k).$$

Din condiția 3) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} D^2\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)=0;$$

cum

$$D^2\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)=M\left\{\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{M_1+M_2+\ldots+M_n}{n}\right)^2\right\},$$

rezultă că șirul $\frac{\zeta_n}{n}$ converge în probabilitate către M.

19. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un șir de variabile aleatoare independente pentru care

$$P(\xi_n=3^{n-1})=\frac{1}{2}, \quad P(\xi_n=-3^{n-1})=\frac{1}{2} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

și $M(\xi_n)=0$.

Fie $\beta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{S_n}$, unde $S_n=D(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)$; să se arate că β_n nu converge în probabilitate către zero.

Soluție. Pentru variabila

$$\xi_n=\begin{pmatrix} 3^{n-1} & -3^{n-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad |\xi_n|=3^{n-1}$$

se vede că

$$|\beta_n| \geqslant \frac{|\xi_n|-|\xi_1|-|\xi_2|-\ldots-|\xi_{n-1}|}{S_n}.$$

Pentru calculele lui S_n avem

$$D^2(\xi_1+\ldots+\xi_n)=\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k).$$

Cum

$$D^2(\xi_k)=3^{2(k-1)}, \quad D^2(\xi_1+\ldots+\xi_n)=\frac{3^{2n}-1}{3^2-1}=\frac{9^n-1}{8},$$

deducem

$$S_n=\sqrt{\frac{9^n-1}{8}}.$$

Atunci

$$|\beta_n| \geqslant \frac{3^{n-1}-(1+3+\ldots+3^{n-2})}{\sqrt{\frac{9^n-1}{8}}} > \frac{\sqrt{2}}{3},$$

de unde

$$P\left(|\beta_n| > \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 1$$

şi deci pentru $\varepsilon \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3}$, şirul $P(|\beta_n) > \varepsilon)$ nu tinde către zero.

20. Să se arate că dacă şirul de variabile aleatoare ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ converge în probabilitate către A şi $f(x)$ este o funcţie continuă în punctul A, atunci şirul $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n), \ldots$ converge în probabilitate către $f(A)$.

Soluţie. Funcţia $f(x)$ fiind continuă în punctul A, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încît

$$|x-A| < \delta_\varepsilon \quad \text{implică} \quad |f(x)-f(A)| < \varepsilon;$$

atunci

$$P(|f(\xi_n)-f(A)| > \varepsilon) \leqslant P(|\xi_n - A| > \delta_\varepsilon),$$

întrucît şirul $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ converge în probabilitate către A, avem

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - A| > \delta_\varepsilon) = 0$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P\{|f(\xi_n)-f(A)| > \varepsilon\} = 0.$$

Rezultă că şirul $(f(\xi_n))$ converge în probabilitate către $f(A)$.

21. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare şi $f(z)$ o funcţie continuă şi monoton crescătoare în $(0, +\infty)$ şi $f(0)=0$. Să se arate că dacă

$$\lim_{n\to\infty} M(f(|\xi_n|)) = 0,$$

atunci şirul $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ converge în probabilitate către zero.

Soluţie. Să notăm cu $A_{n,\varepsilon} = \{x; |\xi_n| \geqslant \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$; din definiţia momentului condiţionat rezultă că

$$M(f(|\xi_n|)) = P(A_{n,\varepsilon}) M_{A_{n,\varepsilon}}(f(|\xi_n|)) + P(\mathbb{C}A_{n,\varepsilon}) \cdot M_{\mathbb{C}A_{n,\varepsilon}}(f(|\xi_n|)),$$

de unde deducem că

$$M(f(|\xi_n|)) \geqslant P(A_{n,\varepsilon}) \cdot \min_{A_{n,\varepsilon}} f(|\xi_n|).$$

Cum însă f este crescătoare şi $(\min|\xi_n|)$ pe mulţimea $A_{n,\varepsilon}$ este ε, rezultă că

$$M(f(|\xi_n|))\geqslant f(\varepsilon)\cdot P(A_{n,\varepsilon}). \qquad (f(\varepsilon)\neq 0).$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} M(f(|\xi_n|))=0$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(A_{n,\varepsilon})=\lim_{n\to\infty} P\{x;\ |\xi_n|\geqslant\varepsilon\}=0,$$

deci şirul $(\xi_n)_n$ converge în probabilitate către zero.

22. Să se arate că pentru o serie de variabile aleatoare independente, convergenţa aproape sigură şi convergenţa în probabilitate sînt echivalente.

Soluţie. Dacă S_n converge în probabilitate către S, atunci există un subşir S_{n_k} care converge aproape sigur către S, cu

$$\sum_k P\left(|S_{n_{k+1}}-S_{n_k}|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)<\infty.$$

Fie $n_k<n\leqslant n_{k+1}$ şi să notăm

$$T_k=\max_n\left(|S_n-S_{n_k}-\mu(S_n-S_{n_{k+1}})|\right);$$

deducem că (v. şi exerciţiul 33)

$$\sum_k P\left(T_k\geqslant\frac{1}{2^k}\right)\leqslant 2\sum_k P\left(|S_{n_{k+1}}-S_{n_k}|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)<\infty$$

şi de aici rezultă că T_k converge aproape sigur către zero.

Prin urmare

$$|S_n-S-\mu(S_n-S_{n_{k+1}})|\leqslant|S_n-S_{n_k}-\mu(S_n-S_{n_{k+1}})|+$$
$$+|S_{n_k}-S|\leqslant T_k+|S_{n_k}-S|.$$

Cum $(T_k+|S_{n_k}-S|)$ converge aproape sigur către zero, rezultă că $(S_n-\mu(S_n-S_{n_{k+1}}))$ converge aproape sigur către S şi deci $(S_n-\mu(S_n-S_{n_{k+1}}))$ converge în probabilitate către S.

Deoarece $S_n\xrightarrow{P}S$, urmează că $\mu(S_n-S_{n_{k+1}})\to 0$ şi de aici $S_n\xrightarrow{a.s}S$.

23. Fie $f(x)$ o funcţie continuă şi mărginită în $(0,+\infty)$ şi $g(s)=\int\limits_0^\infty f(x)\,e^{-sx}\,dx$, dacă $s>0$ (*transformata Laplace a funcţiei* $f(x)$).

Dacă $y>0$ să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n g^{(n-1)}\left(\frac{n}{y}\right)\cdot(-1)^{n-1}}{y^n(n-1)!}=f(y).$$

Soluție. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un șir de variabile aleatoare care au funcția de repartiție

$$P(\xi_k<x)=1-e^{-\frac{x}{y}}, \quad \text{dacă} \quad x>0.$$

Valoarea medie a variabilelor ξ_k este

$$M(\xi_k)=+\frac{1}{y}\int_0^\infty x\cdot e^{-\frac{x}{y}}dx=+y\int_0^\infty ue^{-u}du=y.$$

Fie $\zeta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$. Variabilele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ având aceeași funcție de repartiție, după legea numerelor mari, rezultă că șirul (ζ_n) converge în probabilitate către y, șirul $(f(\zeta_n))$ converge în probabilitate către $f(y)$ și că

$$\lim_{n\to\infty}M(f(\zeta_n))=f(y).$$

Rămîne să arătăm că

$$M(f(\zeta_n))=\frac{n^n g^{(n-1)}\left(\frac{n}{y}\right)\cdot(-1)^{n-1}}{y^n(n-1)!}.$$

Pentru aceasta să observăm că variabila $\frac{\xi_k}{n}$ are funcția de repartiție

$$P\left(\frac{\xi_k}{n}<x\right)=1-e^{-\frac{nx}{y}}$$

și densitatea de repartiție

$$\rho_{\frac{\xi_k}{n}}(x)=\frac{n}{y}e^{-\frac{nx}{y}}.$$

Să calculăm densitatea de repartiție a variabilei

$$\zeta_n=\frac{\xi_1}{n}+\frac{\xi_2}{n}+\ldots+\frac{\xi_n}{n}.$$

În cazul $n=2$, densitatea de repartiție

$$\rho_{\zeta_2}(z)=\int_0^z \frac{2}{y}e^{-\frac{2u}{y}}\cdot\frac{2}{y}e^{-\frac{2(z-u)}{y}}\,du,$$

de unde

$$\rho_{\zeta_2}(z)=\frac{2^2ze^{-\frac{2z}{y}}}{y^2}.$$

Prin formula de recurență

$$\rho_{\zeta_n}(z)=\int_0^z \rho_{\zeta_{n-1}}(u)\cdot\rho_{\zeta_1}(z-u)\,du,$$

se obține

$$\rho_{\zeta_n}(z)=\frac{n^n\cdot z^{n-1}e^{-\frac{nz}{y}}}{y^n(n-1)!}$$

și deci

$$M(f(\zeta_n))=\int_0^\infty f(x)\cdot\rho_{\zeta_n}(x)\,dx=\int_0^\infty f(x)\frac{n^nx^{n-1}e^{-\frac{nx}{y}}}{y^n(n-1)!}\,dx=$$

$$=\frac{n^n}{y^n(n-1)!}\int_0^\infty f(x)\,x^{n-1}e^{-\frac{nx}{y}}dx. \qquad (*)$$

Derivînd pe $g(s)=\int_0^\infty f(x)\,e^{-sx}\,dx$ de $n-1$ ori în punctul $s=\frac{n}{y}$, obținem

$$g^{(n-1)}\left(\frac{n}{y}\right)=\int_0^\infty(-1)^{n-1}x^{n-1}f(x)e^{-\frac{nx}{y}}dx.$$

Înlocuind în (*), avem

$$M(f(\zeta_n))=\frac{n^n}{y^n(n-1)!}\left((-1)^{n-1}\cdot g^{(n-1)}\left(\frac{n}{y}\right)\right)$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^ng^{(n-1)}\left(\frac{n}{y}\right)\cdot(-1)^{n-1}}{y^n(n-1)!}=f(y).$$

24. Fie $f(x)$ o funcție continuă și mărginită în intervalul $(0,+\infty)$. Dacă $h>0$ să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty f\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{(nh)^k}{k!}e^{-hn}=f(x+h)$$

(*teorema lui F. Hille*).

Soluție. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un șir de variabile aleatoare care urmează legea lui Poisson cu $M(\xi_k)=h$. Fie $\zeta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$; după exercițiile 11 și 20, șirul $(f(x+\zeta_n))$ converge în probabilitate către $f(x+h)$. Aplicînd rezultatul din exercițiul 15, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} M(f(x+\zeta_n))=f(n+h).$$

Cum

$$M(f(x+\zeta_n))=\sum_{k=1}^{\infty} f\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\left(\frac{nh}{k!}\right)^k e^{-hn},$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{(nh)^k}{k!}e^{-hn}f(x+h).$$

25. Să se arate că condiția necesară și suficientă pentru ca șirul de variabile $(\xi_n)_n$ să conveargă în probabilitate către o constantă M este ca

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\xi_n}(t)=e^{iMt},$$

unde $\varphi_{\xi_n}(t)$ este funcția caracteristică a variabilei ξ_n.

Soluție. Spunem că șirul (ξ_n) *converge în repartiție* sau *în sensul lui Bernoulli* către variabila ξ, dacă șirul funcțiilor de repartiție $(F_{\xi_n}(x))$ converge către $(F_\xi(x))$, în punctele de continuitate a funcției F_ξ.

In general convergența în sensul Bernoulli nu implică convergența în probabilitate. Acest exercițiu constituie un caz în care convergența în sensul Bernoulli implică convergența în probabilitate. Vom însemna cu $F_n(x)$ funcția de repartiție a variabilei ξ_n:

$$F_n(x)=P(t;\ \xi_n(t)<x).$$

Constanta M interpretată ca variabilă aleatoare are funcția de repartiție

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant M\\ 1, & M<x.\end{cases}$$

Funcția $F(x)$ are un singur punct de discontinuitate $x=M$. Avem

$$0\leqslant 1-P\{t;\ |\xi_n-M|\leqslant\varepsilon\}=1-P\{t;\ M-\varepsilon\leqslant\xi_n\leqslant M+\varepsilon\};$$

cum

$$P\{t;\ M-\varepsilon\leqslant\xi_n<M+\varepsilon\}=F_n(M+\varepsilon)-F_n(M-\varepsilon),$$

rezultă

$$1-P\{t;\ |\xi_n-M|\leqslant\varepsilon\}\leqslant 1-(F_n(M+\varepsilon)-F_n(M-\varepsilon)).$$

Inlocuind pe 1 prin $F(M+\varepsilon)-F(M-\varepsilon)$, avem

$$1-P(|\xi_n-M|\leqslant\varepsilon)\leqslant(F(M+\varepsilon)-F_n(M+\varepsilon))-(F(M-\varepsilon)-F_n(M-\varepsilon)).$$

Deci convergenţa în repartiţie implică:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n-M|\leqslant\varepsilon)=1,$$

adică şirul ξ_n converge în probabilitate către M. Cum convergenţa în probabilitate implică convergenţa în modul Bernoulli, rezultă că, condiţia necesară şi suficientă ca şirul (ξ_n) să conveargă în probabilitate către constanta M este ca el să conveargă în repartiţie.

Rezultatul final se obţine ţinînd seama de faptul că convergenţa în modul Bernoulli echivalează cu convergenţa funcţiilor caracteristice. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\xi_n}(t)=\varphi_M(t)=e^{iMt},$$

unde $\varphi_{\xi_n}(t)$ este funcţia caracteristică a variabilei ξ_n.

26. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente, avînd toate aceeaşi funcţie de repartiţie şi valoarea medie M; dacă

$$\zeta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n},$$

să se arate că şirul $(\zeta_n)_n$ converge în probabilitate către M.

Soluţie. Fie $\varphi(t)$ funcţia caracteristică a variabilei ξ_k. Deoarece variabilele sînt independente, avem

$$\varphi_{\zeta_n}(t)=\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

Dar întrucît valoarea medie există, $\varphi_{\zeta_n}(t)$ este diferenţiabilă şi poate fi dezvoltată în serie

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1!}\varphi'(0)+\theta(x),$$

unde

$$\varphi(0)=1,\quad \varphi'(0)=iM \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to 0}\theta(x)=0;$$

deci

$$\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n=\left(1+\frac{iMt}{n}+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n=e^{iMt},$$

rezultă că şirul funcţiilor caracteristice $\varphi_{\xi_n}(t)$ converge către funcţia caracteristică a variabilei constante $\zeta=M$.

Convergenţa funcţiilor caracteristice echivalează însă cu convergenţa funcţiilor de repartiţie; rezultă că şirul ζ_n converge în repartiţie către M. Aplicînd exerciţiul precedent, rezultă convergenţa în probabilitate a şirului (ζ_n) către M.

27. Să se arate că şirul de variabile aleatoare pozitive $(\xi_n)_n$ cu aceeaşi densitate de repartiţie $\rho_n(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}$ tinde către legea normală cînd $n\to\infty$.

Soluţie. Să calculăm $M(\xi_n)$ şi $D(\xi_n)$. Avem

$$M(\xi_n)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=\frac{\Gamma(n+1)}{(n-1)!}=\frac{n!}{(n-1)!}=n,$$

$$D(\xi_n)=M(\xi_n^2)-(M(\xi_n))^2.$$

Însă

$$M(\xi_n^2)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(n+2)}{(n-1)!}=n(n+1),$$

şi deci

$$D(\xi_n)=n(n+1)-n^2=n.$$

Să considerăm variabila η_n normată convenabil

$$\eta_n=\frac{\xi_n-M(\xi_n)}{\sqrt{D(\xi_n)}}=\frac{\xi_n-n}{\sqrt{n}}$$

sau

$$\eta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_n-\sqrt{n}.$$

Să notăm cu $\bar{\rho}_n$ densitatea de repartiție a variabilei η_n și fie $\varphi_n(t)$ funcția caracteristică a variabilei η_n. Avem:

$$\varphi_n(t)=\int_0^\infty e^{it\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)}\rho_n(x)\,dx=e^{-it\sqrt{n}}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right)x}\,dx.$$

Integrînd prin părți de $n-1$ ori, vom obține

$$\varphi_n(t)=e^{-it\sqrt{n}}\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{-n+1};$$

$$\ln\varphi_n(t)=-it\sqrt{n}-(n-1)\ln\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right)=-it\sqrt{n}+$$

$$+(n-1)\left(\frac{it}{\sqrt{n}}-\frac{t^2}{2n}+\theta(n)\right)=-\frac{it}{\sqrt{n}}-\frac{t^2}{2}+\theta'(n).$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty}\ln\varphi_n(t)=-\frac{t^2}{2},$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Prin urmare șirul de variabile aleatoare ξ_n tinde (în repartiție) către legea normală.

28. Fie f o funcție definită pe $(0, +\infty)$, de două ori derivabilă, cu proprietățile:

1) $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)=0$, $\sup\limits_{0<x<+\infty} f(x)=1$;

2) există un singur punct $a>0$ în care $f(a)=1$ și $f(x)<1$, pentru orice $x\neq a$;

3) $f''(a)=-b$, $b>0$;

4) există o vecinătate a punctului a pe care f'' este continuă.

Dacă g este o funcție definită pe $[0, +\infty)$ nenegativă și continuă astfel încît

$$\int_0^\infty f(t)\,g(t)\,dt$$

există, atunci avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{nb}{2\pi}}\int_0^\infty g(t)\cdot f^n(t)\,dt=g(a).$$

Soluţie. Fie funcţia $h(t)$ definită prin:

$$h(t) = -\frac{1}{b}\ln f(t);$$

avem

$$h(a)=0, \quad h'(a)=0, \quad h''(a)=1$$

şi în jurul punctului a, $h''(a)$ este continuă. In jurul punctului avem:

$$h(t)=\frac{(t-a)^2}{2}h''(a)+\frac{(t-a)^2}{2!}\Delta h''(t,\ a),$$

unde

$$\lim_{t\to a}\Delta h''(t, a)=0.$$

sau

$$f(t)=e^{-\frac{b(t-a)^2}{2}-\frac{b(t-a)^2}{2}\Delta h''(t,a)}.$$

Pentru $f^n(t)$ vom scrie

$$f^n(t)=e^{-\frac{nb(t-a)^2}{2}}(1-\rho(t,\ a)),$$

unde $\rho(t,\ a)$ tinde către zero, cînd $t\to a$. Atunci

$$\sqrt{\frac{nb}{2\pi}}\int_0^a g(t)\cdot f^n(b)\,dt=\sqrt{\frac{nb}{2\pi}}\int_0^a g(t)\cdot e^{-\frac{nb(t-a)^2}{2}}(1-\rho(t,\ a))\,dt.$$

Făcînd schimbarea de variabilă

$$t=a+\frac{u}{\sqrt{nb}},$$

obţinem $(\alpha>a)$:

$$\sqrt{\frac{nb}{2\pi}}\int_0^a g(t)\cdot f^n(t)\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{nb}{2\pi}}\int_{-\sqrt{nb}\cdot a}^{(\alpha-a)\sqrt{nb}} g\left(a+\frac{u}{\sqrt{nb}}\right)\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{nb}}\left(1-\rho\left(a,\ a+\frac{u}{\sqrt{nb}}\right)\right)du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{nb}\cdot a}^{(\alpha-a)\sqrt{nb}} g\left(a+\frac{u}{\sqrt{nb}}\right)\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\left(1-\rho\left(a,\ a+\frac{u}{\sqrt{nb}}\right)\right)du.$$

Știind că g este continuă și că $\lim_{t\to a}\rho(a,\ t)=0$, pentru $\varepsilon>0$ există δ, astfel încît pentru orice t din intervalul $|t-a|<\delta$, să avem:

$$g(a)-\varepsilon<g(t)<g(a)+\varepsilon \quad \text{și} \quad -\varepsilon<\rho(t,\ a)<\varepsilon.$$

Alegem pe n astfel încît:

$$\frac{a}{\sqrt{nb}}<\delta, \quad n>\frac{u^2}{\delta^2\cdot b} \quad \text{și} \quad \sqrt{2\pi}-\varepsilon\leqslant\int_{-\sqrt{nb}\cdot a}^{(a-a)\sqrt{nb}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\leqslant\sqrt{2\pi}+\varepsilon. \quad (*)$$

Obținem

$$\frac{(g(a)-\varepsilon)(1-\varepsilon)(\sqrt{2\pi}-\varepsilon)}{\sqrt{2\pi}}\leqslant\sqrt{\frac{nb}{2\pi}}\int_0^a g(t)\cdot f^n(t)\,dt\leqslant\frac{(g(a)+\varepsilon)(1+\varepsilon)(\sqrt{2\pi}+\varepsilon)}{\sqrt{2\pi}}$$

pentru orice $n>N(\varepsilon)$, unde $N(\varepsilon)$ este determinat în condițiile (*). Cum ε este arbitrar, rezultă că

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{nb}{2\pi}}\int_0^a g(t)\cdot f^n(t)\,dt=g(a),$$

adică

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{nb}{2\pi}}\int_0^\infty g(t)\cdot f^n(t)\,dt=g(a).$$

29. Să se arate dacă $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$ este un șir de variabile aleatoare independente avînd aceeași distribuție simetrică față de origine, cu $D(\xi_k)=1$ și $\beta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, atunci,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{M}_1(\beta_n)}{D(\beta_n)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Soluție. Deoarece $D(\xi_k)=1$, rezultă că $D(\beta_n)=\sqrt{n}$ și deci

$$\frac{\overline{M}_1(\beta_n)}{D(\beta_n)}=\overline{M}_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Dacă notăm $\varphi(t)$ funcția caracteristică a variabilelor ξ_k atunci

$$\varphi_{\frac{\beta_n}{\sqrt{n}}}(t)=\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n;$$

aceasta este o funcție caracteristică reală. Am văzut în exercițiul 23, cap. IV, că dacă $M(\xi)=0$ și $\overline{M}_1(\xi)$ există, atunci

$$\overline{M}_1(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}(\varphi'(t))}{t}\,dt.$$

Pentru variabila $\frac{\beta_n}{\sqrt{n}}$ avem

$$\overline{M}_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{\sqrt{n}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n-1}\varphi'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{t}\,dt.$$

Notînd $u=\frac{t}{\sqrt{n}}$, avem

$$\overline{M}_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{n}}\right) = -\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{n-1}(u)\cdot\frac{\varphi'(u)}{u}\,du$$

și

$$|\varphi(t)|\leqslant 1,\quad \varphi(0)=1,\quad \varphi'(0)=0,\quad \varphi''(0)=-1=\lim_{u\to 0}\frac{\varphi'(u)}{u};$$

de asemenea, în orice punct $u\neq 0$, în care $|\varphi(u)|=1$, avem $\frac{\varphi'(u)}{u}=0$.

Aplicînd rezultatul exercițiului precedent pentru $a=0$, $b=1$, $g(a)=1$, deducem

$$\lim_{n\to\infty}\overline{M}_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[-\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{n-1}(u)\frac{\varphi'(u)}{u}\,du\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

30. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un șir de variabile aleatoare care urmează aceeași lege normală și pentru care $M(\xi_n)=0$ și $D(\xi_n)=1$. Fie $\chi_n^2=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2$. Să se arate că variabila

$$\eta_n=\frac{\chi_n^2-n}{\sqrt{2n}}$$

tinde către legea normală, cînd $n\to\infty$.

Soluție. Vom arăta că funcția caracteristică a variabilei η_n tinde către $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Folosind relațiile dintre funcțiile caracteristice ale

variabilelor aleatoare independente avem (notînd cu φ funcţiile caracteristice)

$$\varphi_{\eta_n}(t) = e^{-\frac{it\eta}{\sqrt{2n}}} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k^2}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right).$$

Cum funcţia caracteristică a variabilei ξ^2 este

$$\varphi_{\xi^2}(t) = (1-2it)^{-1/2},$$

avem

$$\varphi_{\eta_n}(t) = e^{-\frac{itn}{\sqrt{2n}}}\left(1-\frac{2it}{\sqrt{2n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

sau încă

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \left[\left(1-\frac{2it}{\sqrt{2n}}\right)e^{\frac{2}{\sqrt{2n}}it}\right]^{-\frac{n}{2}};$$

dezvoltînd în serie expresia din paranteză şi grupînd termenii care conţin pe $\frac{1}{n}$ la puteri mai mari decît 1, deducem

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \left(1+\frac{t^2}{n}+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Se vede că, atunci cînd $n\to\infty$,

$$\varphi_{\eta_n}(t)\to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

deci tinde către o repartiţie normală (0,1).

31. Fie $\{\xi_n\}$ un şir de variabile aleatoare independente care iau valorile $\sqrt{n}$ cu probabilităţile $\frac{1}{2}$.

Să se verifice dacă este îndeplinită condiţia teoremei lui Liapunov.

Soluţie. Trebuie să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(n)}{\mu_{(n)}} = 0,$$

$$\rho_{(n)}^3 = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^3, \quad \rho_j^3 = M_3(|\xi_j|);$$

$$\mu_{(n)}^2 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2; \quad \mu_j^2 = M_2(\xi_j).$$

Deoarece variabilele ξ_n sînt independente, avem:

$$\mu_{(n)}^2 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2 = n\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n\right) = n^2,$$

$$\rho_{(n)}^3 = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^3 = n\left(\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}\right) = n^{\frac{3}{2}} \cdot n,$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n)}{\mu_{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n \cdot n^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{6}} = 0.$$

Condiţia teoremei lui Liapunov este verificată.

32. Să se arate că dacă şirul de variabile aleatoare (η_n) converge în probabilitate către zero şi $P(\xi_n < a)$ converge către $F(a)$ (continuă), atunci

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n + \eta_n < a) = F(a).$$

Soluţie. Este suficient să demonstrăm proprietatea cînd (η_n) tinde către zero aproape peste tot.

Fie $\varepsilon > 0$ şi $A_N = \{x : \eta_n(x) > \varepsilon, \quad n \geqslant N\}$.

Dacă N este suficient de mare, $P(A_N) \leqslant \varepsilon$. Presupunem că această proprietate este adevărată. Atunci

$$P(\xi_n + \eta_n < a) = P(A_N \cap \{\xi_n + \eta_n < a\}) + P(\complement A_N \cap \{\xi_n + \eta_n < a\}) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + P(\complement A_N \cap (\xi_n < a - \eta_n)) \leqslant \varepsilon + P(\xi_n < a + \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + F(a + \varepsilon),$$

deoarece $-\eta_n \leqslant \varepsilon$; deci

$$\limsup_{n\to\infty} P(\xi_n + \eta_n < a) \leqslant F(a + \varepsilon).$$

Pe de altă parte,

$$1-P(\xi_n+\eta_n<a)=P(\xi_n+\eta_n\geqslant a)\leqslant$$

$$\leqslant P(\xi_n\geqslant a-\eta_n)\leqslant P(A_N\cap(\xi_n\geqslant a-\eta_n))+P(\complement A_n\cap[\xi_n\geqslant a-\eta_n])\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon+P(\xi_n\geqslant a-\varepsilon)$$

şi deci

$$1-P(\xi_n+\eta_n<a)\leqslant\varepsilon+1-P(\xi_n<a-\varepsilon)$$

sau

$$P(\xi_n+\eta_n<a)>-\varepsilon+P(\xi_n<a-\varepsilon);$$

de unde

$$\liminf_{n\to\infty} P(\xi_n+\eta_n<a)\geqslant-\varepsilon+F(a-\varepsilon)\geqslant F(a-\varepsilon)$$

sau, în sfîrşit,

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n+\eta_n<a)=F(a).$$

33. Vom spune că o variabilă aleatoare este *simetrizabilă* şi o vom nota cu ξ^s, dacă $\xi^s=\xi-\xi'$, unde ξ' este independentă de ξ şi are aceeaşi distribuţie.

Să se arate că pentru orice ε şi orice a

$$\frac{1}{2}P[\xi-\mu\xi\geqslant\varepsilon]\leqslant P(\xi^s\geqslant\varepsilon) \tag{1}$$

şi

$$\frac{1}{2}P(|\xi-\mu\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant P(|\xi^s|\geqslant\varepsilon)\leqslant 2P\left(|\xi-a|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{2}$$

unde $\mu\xi$ este mediana variabilei ξ.

Dacă şirul (ξ_n-a_n) converge în probabilitate către zero, atunci şirul (ξ_n^s) converge în probabilitate către zero, iar şirul $(\xi_n-\mu\xi_n)$ converge şi el către zero.

Soluţie. Vom reaminti definiţia medianei:

$$P(\xi\geqslant\mu\xi)\geqslant\frac{1}{2}\leqslant P(\xi\leqslant\mu\xi)$$

care este echivalentă cu

$$F(\mu\xi)\leqslant\frac{1}{2},\quad F(\mu\xi+0)\geqslant\frac{1}{2}.$$

Deoarece $\xi^s = \xi - \xi'$, unde ξ şi ξ' sînt independente şi au aceeaşi repartiţie, urmează că $\mu = \mu\xi = \mu\xi'$ şi deci

$$P(\xi^s \geqslant \varepsilon) = P((\xi - \mu) - (\xi' - \mu) \geqslant \varepsilon) \geqslant P(\xi - \mu \geqslant \varepsilon,\ \xi' - \mu \leqslant 0) =$$

$$= P(\xi - \mu \geqslant \varepsilon) \cdot P(\xi' - \mu \leqslant 0) \geqslant \frac{1}{2} P(\xi - \mu \geqslant \varepsilon).$$

Deci (1) este demonstrată.

Dacă în (1) înlocuim ξ cu $-\xi$, rezultă

$$\frac{1}{2} P(|\xi - \mu\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|\xi^s| \geqslant \varepsilon). \tag{1'}$$

Însă

$$P(|\xi^s| \geqslant \varepsilon) = P(|(\xi - a) + (\xi' - a)| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|\xi - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) +$$

$$+ P\left(|\xi' - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2P\left(|\xi - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

de unde, ţinînd seama şi de (1′) deducem

$$\frac{1}{2} P(|\xi - \mu\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|\xi^s| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2P\left(|\xi - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Dacă în (2) înlocuim pe ξ cu ξ_n, rezultă imediat că dacă $\xi_n - a_n \xrightarrow{P} 0$, atunci

$$\xi_n^s \xrightarrow{P} 0 \quad \text{şi} \quad a_n - \mu\xi_n \longrightarrow 0.$$

34. O urnă conţine B bile albe şi N bile negre. Se fac o serie de extracţii, astfel încît după fiecare extracţie se înlocuieşte bila extrasă cu o bilă de culoare contrară.

Fie ν numărul de bile albe ieşite în n extracţii succesive şi p_n probabilitatea de a obţine o bilă albă în extracţia de ordinul n.

Să se arate că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nu}{n} = \lim_{n \to \infty} p_n = \frac{1}{2}.$$

Soluţie. După n extracţii vom avea în urnă

$B - 2\nu + n$ bile albe şi $N + 2\nu - n$ bile negre.

Deoarece numărul total de bile din urnă este $B+N$, trebuie să avem:

$$0 \leqslant B-2\nu+n \leqslant B+N; \quad 0 \leqslant N+2\nu-n \leqslant B+N$$

sau

$$-\frac{N}{2n} \leqslant \frac{\nu}{n}-\frac{1}{2} \leqslant \frac{B}{2n},$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu}{n} = \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte,

$$p_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{B}{B+N}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{B+N}\right)^{n-1}$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$$

sau în sfîrșit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu}{n} = \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}.$$

Acest exemplu ne arată că frecvența $\frac{\nu}{n}$ tinde, pentru $n\to\infty$, către probabilitatea $\frac{1}{2}$ în sensul clasic al analizei.

35. *Problema ruletei*[1]). Un cerc mobil în jurul centrului său este împărțit în $2n$ arce care se colorează alternativ în roșu și negru. Sînt n arce roșii de lungimi egale cu R și n arce negre de lungimi egale cu N. Pe suportul cercului este fixat un reper. Dîndu-se un impuls cercului, să se determine probabilitatea p_n ca în fața reperului să se oprească un arc roșu (sau unul negru) și să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{R}{R+N}.$$

Soluție. Problema ruletei a fost pusă pentru prima dată de H. Poincaré. Apoi matematicienii Borel și M. Fréchet au dat condiții de rezolvare a problemei.

Notînd cu θ unghiul de rotație al ruletei, vom presupune că

$$P(\theta_1 < \theta \leqslant \theta_2)$$

este dată de o densitate $f(\theta)$, integrabilă Riemann pe $[0, +\infty)$, adică

$$\int_0^{\infty} f(\theta)\, d\theta = 1.$$

---

[1]) Vezi [27].

Reprezentînd, într-un sistem de axe θOy, curba

$$y = f(\theta),$$

vom obține pe axa absciselor succesiunea de segmente roșii și negre (fig. 16), de lungimi, respectiv, R și N.

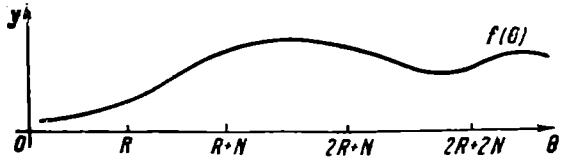

Fig. 16.

Vom nota pentru f, pe intervalul R_k, cu M_k și m_k marginile superioară și inferioară și cu M'_k și m'_k marginile superioară și inferioară pe N_k. Atunci

$$\sum_k m_k \cdot R \leqslant p_n \leqslant \sum_k M_k \cdot R$$

și

$$\sum_0^\infty (m_k R + m'_k N) \leqslant \int_0^\infty f(\theta)\, d\theta = 1 \leqslant \sum_0^\infty (M_k R + M'_k N). \qquad (*)$$

Notînd cu y_k valoarea funcției $f(\theta)$ în punctul de diviziune dintre R_k și N_k și cu

$$p'_n = \sum_k y_k R, \quad S' = \sum_k y_k (R+N),$$

avem:

$$|p_n - p'_n| \leqslant \sum_k (M_k - m_k) R,$$

$$|1 - S'| \leqslant \sum_k (M_k - m_k) R + \sum_k (M'_k - m'_k) N.$$

Rezultă de aici că

$$\frac{p'_n}{S'} = \frac{R}{R+N}.$$

Vom presupune un șir de rulete în care numărul total $2n$ de diviziuni crește astfel, încît raportul $\frac{R}{N}$ să rămînă constant.

Funcția $f(\theta)$ fiind integrabilă, termenii extremi din inegalitatea (*) tind către 1 și deci diferența

$$|1 - S'|$$

tinde către zero, la fel cu diferența

$$|p_n - p'_n|.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{R}{R+N}.$$

36. Fie U o urnă care conține două bile, una albă și una neagră. Se fac din urnă extracții succesive după legea următoare: după fiecare extracție, bila ieșită este înlocuită cu două bile de aceeași culoare. Notînd cu $P_n(k)$ probabilitatea ca în n extracții să scoatem k bile albe, și cu $\frac{k}{n}$ frecvența bilelor albe în n extracții, să se arate că șirul frecvențelor nu este convergent.

Soluție. După n extracții, putem scoate

$$0, 1, 2, \ldots, n$$

bile albe cu probabilitățile

$$P_n(0), P_n(1), \ldots, P_n(n).$$

Din ipotezele considerate rezultă relația de recurență

$$P_n(k) = \frac{k}{n+1} P_{n+1}(k-1) + \frac{n-k}{n+1} P_{n-1}(k).$$

Presupunem că

$$P_{n-k}(\alpha-1) = P_{n-1}(\alpha) = \frac{1}{n},$$

de unde rezultă că

$$P_n(k) = \frac{1}{1+n}.$$

Dacă în plus vom presupune că $P_{n-j}(k) = \frac{1}{n}$, atunci $P_n(k) = \frac{1}{n+1}$ ($k=0, 1, 2, \ldots, n$). Cum

$$P_n(0) = P_1(1) = \frac{1}{2},$$

atunci $P_n(k) = \frac{1}{n+1}$ este adevărată pentru orice n și k.

Rezultă că probabilitățile ca în n extracții să se obțină frecvențele

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

sînt respectiv

$$\frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n+1}.$$

Cum toate frecvenţele sînt egal probabile, nu poate fi vorba de vre-o convergenţă.

37. Fie date m urne

$$U_1(\lambda_1, \mu_1), \; U_2(\lambda_2, \mu_2), \; \ldots, \; U_m(\lambda_m, \mu_m),$$

fiecare urnă $U_k(\lambda_k, \mu_k)$ avînd λ_k bile albe şi μ_k bile negre, cu $\lambda_1=0$, $\mu_m=0$, $\lambda_k\neq 0$, $\mu_k\neq 0$. Din urne facem extracţii după legea următoare: dacă a r-a extracţie s-a făcut din urna U_k şi s-a obţinut o bilă albă, extracţia de ordinul $r+1$ va fi efectuată din urna U_{k-1}, iar dacă s-a obţinut o bilă neagră extracţia a $r+1$ se va efectua din urna U_{k+1}. Notînd cu $P_k(n)$ probabilitatea de a extrage o bilă albă în a n-a extracţie şi ştiind că am început extracţiile cu o bilă albă din urna U_k, să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n P_k(n)}{n} = \frac{1}{2}.$$

Soluţie. Notăm cu p_k probabilitatea de a extrage bila albă din urna U_k şi q_k probabilitatea de a extrage bila neagră din U_k.

Avem $p_1=0$, $p_k=\dfrac{\lambda_k}{\lambda_k+\mu_k}\neq 0$; $p_m=1$

$$q_1=1, \quad q_k=\frac{\mu_k}{\lambda_k+\mu_k}\neq 0; \quad q_m=0.$$

Vom nota cu x_n numărul bilelor albe ieşite la a n-a extracţie $x_n=(0,1)$ şi cu $P_k(n, m)$ probabilitatea de a extrage m bile albe în n extracţii, prima fiind făcută din urna U_k.

Între probabilităţile introduse avem relaţiile

$$P_1(n)=P_2(n-1),$$

$$P_k(n)=P_k\times P_{k-1}(n-1)+q_nP_{k+1}(n-1)$$

şi

$$P_m(n)=P_{m-1}(n-1).$$

Pentru probabilitățile $P_k(n, m)$ avem relațiile

$$P_k(n, m) = p_k P_{k-1}(n-1, m-1) + q_k P_{k+1}(n-1, m). \qquad (1)$$

Observînd că avem

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m,$$

cu probabilitatea $P_k(n, m)$, valoarea medie a numărului de bile albe în n extracții este

$$M_k(n) = \sum_{m=0}^{n} m P_k(n, m).$$

Folosind relațiile de recurență (1), avem

$$M_k(n) = p_k \cdot M_{k-1}(n-1) + q_k \cdot M_{k+1}(n-1) + p_k; \qquad (2)$$

soluția acestui sistem este de forma

$$M_k(n) = \theta_n + \beta_k,$$

unde β_k verifică sistemul dedus din (2)

$$p_k \beta_{k-1} + q_k \beta_{k+1} - \beta_k = \theta - p_k.$$

Cum $p_k + q_k = 1$, putem scrie sistemul astfel

$$p_k(\beta_{k-1} - \beta_k) - q_k(\beta_k - \beta_{k+1}) = \theta - p_k; \qquad (3)$$

dacă notăm cu $y_{k-1} = \beta_{k-1} - \beta_k$, și punem $q_k = t_k \cdot p_k$ acest sistem devine

$$\left.\begin{aligned} y_{k-1} - t_k y_k &= \frac{\theta}{p_k} - 1, \\ y_1 = -\theta,\ y_m &= \theta - 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Din relația $p_k + q_k = 1$, rezultă că

$$\frac{1}{p_k} = 1 + t_k$$

și înlocuind în (4), obținem sistemul

$$y_{k-1} = t_k y_k + \theta t_k + \theta - 1;$$

de unde:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\theta \\ y_1 &= t_2 y_2 + \theta t_2 + \theta - 1 \\ y_2 &= t_3 y_3 + \theta t_3 + \theta - 1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_{m-1} &= \theta - 1 \end{aligned}$$

sau, încă,

$$-\theta = y_1$$

$$y_1 = t_2 y_2 + t_2\theta + \theta - 1$$

$$t_2 y_2 = t_2 t_3 y_3 + t_2 t_3 \theta + t_2(\theta - 1)$$

$$t_2 t_3 y_3 = t_2 t_3 t_4 y_4 + t_2 t_3 t_4 \theta + t_2 t_3(\theta - 1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_2 t_3 \ldots t_{m-1} y_{m-1} = t_2 t_3 \ldots t_{m-1}(\theta - 1);$$

adunînd aceste relaţii, avem

$$-\theta = t_2 t_3 \ldots t_{m-1}(\theta - 1) + \theta(t_2 + t_2 t_3 + \ldots + t_2 t_3 \ldots t_{m-1}) +$$

$$+ (1 + t_2 + t_2 t_3 + \ldots + t_2 t_3 \ldots t_{m-1})(\theta - 1),$$

$$-\theta = \theta - 1 + (t_2 + t_2 t_3 + \ldots + t_2 t_3 \ldots t_n)(2\theta - 1) + \cdots$$

Deducem, de aici,

$$\theta = \frac{1}{2}.$$

Cum însă

$$P_k(n) = M_k(x_n) \quad \text{şi} \quad M_k(n) = \sum_{p=1}^{m} M_k(x_p),$$

rezultă că

$$M_k(n) = P_k(1) + \ldots + P_n(n) = \frac{1}{2} n + \beta_k,$$

de unde deducem că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_k(1) + P_k(2) + \ldots + P_k(n)}{n} = \frac{1}{2},$$

adică probabilitatea de a obţine în extracţia a n-a o bilă albă tinde în medie aritmetică către $\frac{1}{2}$.

38. Să considerăm o urnă care conţine $2k$ bile de culoarea 1 şi $2k$ bile de culoarea 2. Se efectuează extracţii şi după fiecare extracţie se înlocuieşte bila extrasă cu o bilă de culoare opusă.

Abaterea $x = \nu - \frac{n}{2}$ va lua următoarele valori

$$-k,\ -k+1,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,\ k \qquad (1)$$

şi

$$-k+\frac{1}{2},\ -k+\frac{3}{2},\ \ldots,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ k-\frac{3}{2},\ k-\frac{1}{2}, \quad (2)$$

după cum n este par sau impar.

Fie $P_{2n}(x)$ probabilitatea abaterii x după $2n$ extracţii şi $P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ probabilitatea abaterii $x-\frac{1}{2}$ după $2n-1$ extracţii.

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2a-1}} C_{2a}^{a-2x}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2a-1}} C_{2a}^{a-2x+1},$$

unde $a=2k$.

Soluţie. Să stabilim o relaţie de recurenţă între $P_{2n}(x)$ şi $P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$; pentru aceasta fie ξ_j, $1\leqslant j\leqslant r$, un şir de variabile aleatoare care iau fiecare valorile 1 sau 0 după cum extracţia din urna considerată furnizează o bilă de culoarea 1 sau 2.

Pentru ca

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=s,$$

trebuie ca

$$\xi_1+\ldots+\xi_{n-1}=s-1$$

sau

$$\xi_1+\ldots+\xi_{n-1}=s.$$

In primul caz, numărul de bile de culoarea 1 din urnă, după extracţia de rang $n-1$, este

$$a-(s-1)+(n-s)=a+n-2s+1,$$

unde $a=2k$, iar în al doilea caz,

$$a-s+n-s-1=a+n-2s-1.$$

In primul caz probabilitatea ca $\xi_n=1$ este

$$\frac{1}{2}+\frac{n-2s+1}{2a},$$

iar în al doilea caz probabilitatea ca $\xi_n=0$ este

$$\frac{1}{2}+\frac{n-2s-1}{2a}.$$

Să descompunem suma

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=s$$

în doi termeni şi anume

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n-1} \quad \text{şi} \quad \xi_n.$$

Atunci,

$$P_n(s)=\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{n}{2}-s+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a}\right]\cdot P_{n-1}(s-1)+$$
$$+\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{n}{2}-s-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a}\right]\cdot P_{n-1}(s).$$

Cum $a=2k$, din ultima relaţie rezultă că

$$\left.\begin{aligned} P_{2n}(x)&=\frac{2k+1}{4k}\left[P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)+P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]+\\ &+\frac{x}{2k}\left[P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)-P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right],\\ P_{2n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right)&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1-x}{2k}\right)P_{2n}(x-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2k}\right)P_{2n}(x)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Să introducem, acum, funcţiile caracteristice corespunzătoare

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2n}(t)&=\sum_{n=-k}^{k}e^{itx}P_{2n}(x)\\ \varphi_{2n+1}(t)&=\sum_{n=-k}^{k}e^{it\left(x+\frac{1}{2}\right)}P_{2n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\\ &-\sum_{n=-k+1}^{k}e^{it\left(x-\frac{1}{2}\right)}P_{2n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Derivînd aceste egalităţi în raport cu t, obţinem:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=-k}^{k}xe^{itx}P_{2n}(x)=-i\varphi'_{2n}(t),\\ &\sum_{n=-k}^{k-1}xe^{i\left(x+\frac{1}{2}\right)t}P_{2n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right)=-i\varphi'_{2n+1}(t)-\frac{1}{2}\varphi_{2n+1}(t),\\ &\sum_{n=-k+1}^{k}x\cdot e^{i\left(x-\frac{1}{2}\right)t}P_{2n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)=-i\varphi'_{2n+1}(t)+\frac{1}{2}\varphi_{2n+1}(t);\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

din aceste egalități și din (3) și (4) rezultă

$$\sum_{n=-k}^{k} e^{itx}P_{2n}(x)=\frac{2k+1}{4k}\sum_{n=-k}^{k} e^{itx}P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{2k+1}{4k}\sum_{n=-k}^{k} e^{itx}P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2k}\sum_{n=-k}^{k} xe^{itx}P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2k}\sum_{n=-k}^{k} xe^{itx}P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{2k+1}{4k}e^{-i\frac{t}{2}}\sum_{n=-k}^{k} e^{i\left(x+\frac{1}{2}\right)t}P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{2k+1}{4k}e^{i\frac{t}{2}}\sum_{n=-k}^{k} e^{i\left(x-\frac{1}{2}\right)t}P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2k}e^{-i\frac{t}{2}}\sum_{n=-k}^{k} xe^{i\left(x+\frac{1}{2}\right)t}P_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2k}e^{i\frac{t}{2}}\sum_{n=-k}^{k} xe^{i\left(x-\frac{1}{2}\right)t}\cdot P_{2n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

ceea ce ne dă voie să scriem

$$\varphi_{2n}(t)=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}\right)\varphi_{2n-1}(t)-\frac{t}{2k}\left(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}\right)\varphi'_{2n-1}(t)$$

și deci

$$\varphi_{2n}(t)=\cos\frac{t}{2}\,\varphi_{2n-1}(t)-\frac{1}{k}\sin\frac{t}{2}\cdot\varphi'_{2n-1}(t). \tag{6}$$

În mod analog, vom obține

$$\varphi_{2n+r}(t)=\cos\frac{t}{2}\,\varphi_{2n}(t)-\frac{1}{k}\sin\frac{t}{2}\cdot\varphi'_{2n}(t). \tag{7}$$

În general, pentru orice $n\in N$

$$\varphi_n(t)=\cos\frac{t}{2}\cdot\varphi_{n-1}(t)-\frac{1}{k}\sin\frac{t}{2}\,\varphi'_{n-1}(t).$$

Deoarece

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}\right)=\cos\frac{t}{2},$$

din relaţia (6) rezultă

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{2k}+\frac{2k-1}{2k}\cos^2\frac{t}{2}$$

$$\varphi_3(t)=\frac{3k-1}{2k^2}\cos\frac{t}{2}+\frac{2k^2-3k+1}{2k^2}\cos^3\frac{t}{2},$$

. . . . . .

Notînd

$$y=\cos\frac{t}{2},$$

din relaţiile (6) şi (7) obţinem

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{2n}(y)&=y\cdot\varphi_{2n-1}(y)+\frac{1-y^2}{2k^2}\varphi'_{2n-1}(y),\\ \varphi_{2n+1}(y)&=y\cdot\varphi_{2n}(y)+\frac{1-y^2}{2k^2}\varphi'_{2n}(y).\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Ultima relaţie din (8) dă, prin derivare,

$$\varphi_{2n+1}(y)=\varphi_{2n}(y)+y\left(1-\frac{1}{k}\right)\varphi'_{2n}(y)+\frac{1-y^2}{2k}\varphi''_{2n}(y)$$

şi ţinînd seama de prima relaţie din (8), obţinem

$$\varphi_{2n}(y)=\left(y^2+\frac{1-y^2}{2k}\right)\varphi_{2n-2}(y)+\left(2-\frac{1}{k}\right)\frac{y(1-y^2)}{2k}\varphi'_{2n-2}(y)+$$

$$+\frac{(1-y^2)^2}{4k^2}\varphi''_{2n-2}(y).\qquad(9)$$

In mod analog, obţinem

$$\varphi_{2n+1}(y)=\left(y^2+\frac{1-y^2}{2k}\right)\varphi_{2n-1}(y)+\left(2-\frac{1}{k}\right)\frac{y(1-y^2)}{2k}\varphi'_{2n-1}(y)+$$

$$+\frac{(1-y^2)^2}{4k^2}\varphi''_{2n-2}(y).\qquad(10)$$

In general, putem scrie

$$\varphi_{2n}(y)=\sum_{j=0}^{n}a_{jn}y^{2j};\quad\varphi_{2n+1}(y)=\sum_{j=0}^{n}b_{jn}y^{2j+1}.$$

Din (9) şi (10) rezultă

$$a_{m+1,\,m+1}=\frac{(2m-2k)(2m-2k+1)}{4k^2}\cdot a_{m,\,m}$$

$$b_{m+1,\,m+1}=\frac{(2m-2k+1)(2m-2k+2)}{4k^2}\,b_{m,\,m}.$$

Urmează că

$$a_{k+1,\,m+1}=0, \quad b_{k,\,m+1}=0$$

și deci pentru $n>k$ funcțiile caracteristice $f_{2n}(y)$ și $f_{2n-1}(y)$ sînt polinoame de grad $2k$, respectiv $2k-1$.

Să demonstrăm, acum, că pentru $n\to\infty$ funcția $f_n(y)$ converge uniform către o funcție $f(y)$.

Într-adevăr, derivînd de r ori egalitatea (9) și făcînd pe $y=1$, obținem

$$\varphi_{2n}^{(r)}(1)=\left(1-\frac{r}{k}\right)^2\varphi_{2n-2}^{(r)}(1)+\alpha_r\varphi_{2n-2}^{(r-1)}(1)+\beta_r\varphi_{2n-2}^{(r-2)}(1), \qquad (11)$$

unde α_r și β_r sînt constante, iar $0\leqslant r\leqslant 2k$ deoarece gradul lui $\varphi_{2n}(y)$ este $2k$. Succesiunea

$$\varphi_{2n}(1), \quad \varphi_{2n}^{(1)}(1), \ \ldots, \ \varphi_{2n}^{(2k)}(1) \qquad (12)$$

se obține din șirul

$$\varphi_{2n-2}(1), \ \varphi_{2n-2}^{(1)}(1), \ \ldots, \ \varphi_{2n-2}^{(2k)}(1)$$

cu ajutorul relației de recurență (11), care se poate scrie sub forma

$$X_r'=\left(1-\frac{r}{k}\right)^2X_r+\alpha_rX_{r-1}+\beta_rX_{r-2}, \quad 0\leqslant r\leqslant 2k, \quad X_0=1.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare transformării liniare precedente sînt egale cu $\left(1-\frac{r}{k}\right)^2$, $1\leqslant r\leqslant 2k$, adică sînt mai mici decît 1 și deci rezultă că iteratele acestei transformări tind către limite finite și bine determinate. Fie, atunci, aceste limite

$$\varphi(1), \quad \varphi^{(1)}(1), \ \ldots, \ \varphi^{(2k)}(1).$$

Pe de altă parte, putem scrie

$$\varphi_{2n}(y)=\varphi_{2n}(1)+(y-1)\varphi_{2n}'(1)+\frac{(y-1)^2}{2!}\varphi_{2n}''(1)+\ldots+\frac{(y-1)^{2k}}{(2k)!}\varphi_{2n}^{(2k)}(1)$$

și considerînd polinomul

$$\varphi(y)=\varphi(1)+(y-1)\varphi'(1)+\frac{(y-1)^2}{2!}\varphi''(1)+\ldots+\frac{(y-1)^{2k}}{(2k)!}\varphi^{(2k)}(1),$$

vom avea

$$\varphi_{2n}(y)-\varphi(y)=[\varphi_{2n}(1)-\varphi(1)]+(y-1)[\varphi_{2n}'(1)-\varphi'(1)]+\ldots+$$

$$+\frac{(y-1)^{2k}}{(2k)!}[\varphi_{2n}^{(2k)}(1)-\varphi^{(2k)}(1)].$$

Cum

$$-1 \leqslant y \leqslant 1, \quad \varphi_{2n}(1) = \varphi(1) = 1$$

rezultă

$$|\varphi_{2n}(y) - \varphi(y)| \leqslant 2|\varphi'_{2n}(1) - \varphi'(1)| + \ldots + \frac{2^{2k}}{(2k)!}|\varphi^{(2k)}_{2n}(1) - \varphi^{(2k)}(1)|.$$

Fiind dat $\varepsilon > 0$, arbitrar de mic, există un n_ε, astfel încît pentru $n > n_\varepsilon$ să avem

$$|\varphi'_{2n}(1) - \varphi'(1)| < \varepsilon, \; |\varphi''_{2n}(1) - \varphi''(1)| < \varepsilon, \; \ldots, \; |\varphi^{(2k)}_{2n}(1) - \varphi^{(2k)}(1)| < \varepsilon;$$

de unde rezultă că

$$|\varphi_{2n}(y) - \varphi(y)| < \varepsilon \left(1 + \frac{2}{2!} + \ldots + \frac{2^{2k}}{(2k)!}\right), \quad \text{pentru} \quad n > n_\varepsilon,$$

oricare ar fi $y \in [-1, 1]$. Putem deci afirma că în acest interval $\varphi_{2n}(y)$ converge uniform către $\varphi(y)$. Pe de altă parte, relaţia (9) ne arată că această limită verifică ecuaţia diferenţială

$$(1 - y^2) Y'' + 2(2k - 1) Y' - 2k(2k - 1) Y = 0. \tag{13}$$

Aceeaşi metodă este aplicabilă şirului de funcţii $(\varphi_{2n+1}(y))_n$ care tinde uniform către un polinom, verificînd de asemenea ecuaţia (13).

Prin simple identificări, se arată că aceste polinoame sînt următoarele:

$$\frac{1}{2^{2k-1}}(y^{2k} + C^2_{2k} y^{2k-2} + \ldots + C^{2k}_{2k}),$$

$$\frac{1}{2^{2k-1}}(C^1_{2k} y^{2k-1} + C^3_{2k} y^{2k-3} + \ldots + C^{2k-1}_{2k} y).$$

Prin urmare, funcţiile caracteristice $f_{2n}(t)$ şi $f_{2n+1}(t)$ converg uniform pentru $n \to \infty$ către următoarele funcţii limită:

$$F(t) = \frac{1}{2^{a-1}}\left[\left(\cos\frac{t}{2}\right)^a + C^2_a\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{a-2} + \ldots + C^a_a\right]$$

$$G(t) = \frac{1}{2^{a-1}}\left[C^1_a\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{a-1} + C^3_a\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{a-3} + \ldots + C^{a-1}_a \cos\frac{t}{2}\right],$$

unde $a = 2k$.

Probabilitatea limită corespunzătoare se deduce fără dificultate. Într-adevăr, fie $P(x)$ această limită şi

$$F(t)=\sum_{x=-k}^{k} P(x)\, e^{itx}$$

$$G(t)=\sum_{x=-k}^{k} P\left(x+\frac{1}{2}\right) e^{t\left(x+\frac{1}{2}\right)t}.$$

Cum

$$P(x)=P(-x),$$

rezultă

$$F(t)=2P(k)\cos kt+2P(k-1)\cdot\cos(k-1)t+\ldots+P(0),$$

$$G(t)=2P\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t+\ldots+2P\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{t}{2},$$

şi deci funcţiile $F(t)$ şi $G(t)$ trebuie să verifice ecuaţia diferenţială

$$2\sin\frac{t}{2}\cdot\theta''+(1-4k)\cos\frac{t}{2}\cdot\theta'+(1-2k)\,k\sin\frac{t}{2}\cdot\theta=0;$$

de unde, prin identificare, rezultă

$$P(k-\nu)=\frac{(4k-2\nu+2)(4k-2\nu+1)}{2\nu(2\nu-1)}P(k-\nu-1),$$

$$P\left(k-\nu-\frac{1}{2}\right)=\frac{(4k-2\nu+3)(4k-2\nu+2)}{(2\nu-1)(2\nu-2)}P\left(k-\nu-\frac{3}{2}\right)$$

sau încă

$$P(k-\nu)=C_{4k}^{2\nu}P(k),$$

$$P\left(k-\nu-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4k}C_{4k}^{2\nu-1}P\left(k-\frac{1}{2}\right).$$

Pe de altă parte,

$$\sum_{\nu=-k}^{k}P(\nu)=1,\quad \sum_{\nu=-k}^{k}P\left(\nu-\frac{1}{2}\right)=1$$

şi relaţiile precedente ne dau

$$P(k)\cdot(C_{4k}^{0}+C_{4k}^{2}+\ldots+C_{4k}^{4k})=1,$$

$$\frac{1}{4k}P\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot(C_{4k}^{1}+C_{4k}^{3}+\ldots+C_{4k}^{4k-1})=1$$

sau încă

$$P(k)=\frac{1}{2^{4k-1}}, \quad P\left(k-\frac{1}{2}\right)=\frac{4k}{2^{4k-1}}$$

şi deci

$$P(k-\nu)=\frac{1}{2^{4k-1}}C_{4k}^{2\nu},$$

$$P\left(k-\nu-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{4k-1}}C_{4k}^{2\nu-1}.$$

In cele din urmă obţinem legile limită

$$P(x)=\frac{1}{2^{2a-1}}C_{2a}^{a-2x},$$

$$P\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2a-1}}C_{2a}^{a-2x-1}$$

şi cu aceasta problema este complet rezolvată.

LANȚURI MARKOV. PROCESE STAȚIONARE. CORELAȚIA ȘI DENSITATEA SPECTRALĂ A PROCESELOR STOCHASTICE

Un șir de desfaceri

$$D^{(n)}=\{A_1^{(n)},\ \ldots,\ A_{r_n}^{(n)}\}\quad (1\leqslant r_n,\ \ 1\leqslant n<\infty)$$

formează un lanț Markov cu un număr finit de stări, dacă

$$P_{A^{(1)}_{q_{i_1}}\cap A^{(2)}_{q_{i_2}}\cap\ldots\cap A^{(n)}_{q_{i_n}}}\left(A^{(n+1)}_{q_{i_{n+1}}}\right)=P_{A^{(n)}_{q_{i_n}}}\left(A^{(n+1)}_{q_{i_{n+1}}}\right)$$

pentru orice n și q_{i_1}, q_{i_2}, $\ldots$, q_{i_n} $(1\leqslant q_{i_m}<r_{i_m};\ i_1<i_2<\ldots<i_n)$ *ori de cîte ori*

$$P\left(A^{(1)}_{q_{i_1}}\cap\ldots\cap A^{(n)}_{q_{i_n}}\right)\neq 0.$$

Notînd

$$p_{ij}(k,n)=P_{A_i^{(k)}}\left(A_j^{(n)}\right),\quad \text{dacă}\quad P\left(A_j^{(k)}\right)\neq 0,$$

care poartă numele de *probabilitate de trecere* de la evenimentul A_i la momentul k, la evenimentul A_j la momentul $n\,(k<n)$, se poate demonstra următoarea relație fundamentală în teoria lanțurilor Markov (care se numește și *relația funcțională a lui Chapman*):

$$p_{ij}(k,n)=\sum_{h=1}^{r_m}p_{ih}(k,m)\,p_{hj}(m,n)\quad (k\leqslant m\leqslant n). \tag{1}$$

Dacă $r_1=r_2=\ldots=r_m=r$ relația de mai sus se poate scrie

$$p_{ij}(k,n)=\sum_{h=1}^{r}p_{ih}(k,m)\,p_{hj}(m,n). \tag{2}$$

Lanțul Markov se numește omogen dacă probabilitatea $p_{ij}(k, n)$ *nu depinde decît de diferența* $n-k$ *și de indicii* i, j. În acest caz, relația fundamentală de mai înainte se poate scrie

$$p_{ij}(n)=\sum_{h=1}^{r} p_{ih}(n')\, p_{hj}(n''),$$

pentru orice numere n' și n'', strict pozitive, care satisfac egalitatea $n'+n''=n$.

Dacă notăm cu $P(n, m)$ matricea

$$\left\| \begin{matrix} p_{11}(n, m) \dots p_{1r}(n, m) \\ p_{r1}(n\, m) \dots p_{rr}(n, m) \end{matrix} \right\|,$$

atunci egalitatea (2) devine

$$P(h, n)=P(h, m)\, P(m, n).$$

Matricile $P(k, k+1)\,(1\leqslant k<\infty)$ determină matricele $P(n, m)$. Dacă lanțul este omogen e suficient să cunoaștem probabilitățile din matricea:

$$P(1)=\left\| \begin{matrix} p_{11}(1) \dots p_{1r}(1) \\ p_{r_1}\ (1) \dots p_{rr}(1) \end{matrix} \right\|$$

pentru ca să determinăm probabilitățile matricelor $P(n)$. Ecuația caracteristică a matricei $P(1)=P$ este dată de

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \dots p_{12} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \dots p_{2r} \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots p_{rr}-\lambda \end{vmatrix}$$

și are următoarele proprietăți:

1) $D(1)=0$,

2) $|\lambda|\leqslant 1$ pentru fiecare rădăcină a ecuației.

Un lanț este ergodic, dacă probabilitatea $P_{jk}(n)$ *are pentru fiecare* k *o limită care nu depinde de evenimentul inițial*, adică

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}(n)=p_k.$$

Șirul $\{p_{jk}(n)\}$ converge către o limită pentru orice k, atunci cînd $n\to\infty$, dacă și numai dacă $\liminf\limits_{k\to\infty} p_k(n)=\limsup\limits_{k\to\infty} p_k(n)$.

Pentru a demonstra că un lanț este ergodic sau nu, vom folosi următoarea teoremă:

Şirul $\{p_{jh}(n)\}$ converge către o limită p_h pentru orice h cînd $n\to\infty$, dacă şi numai dacă există un m_0 şi un h, astfel încît

$$p_{jh_0}(m_0)>0 \qquad \text{pentru orice } j.$$

Procesul continuu, cu probabilităţile $p_{jk}(s,\ t)$ $(s\leqslant t,\ j,\ k=1,2,\ldots,\ m)$ care reprezintă probabilitatea de trecere de la evenimentul E_j $(j=1,2,\ldots,\ m)$ în momentul s, la evenimentul E_k $(k=1,2,\ldots,\ m)$ în momentul ulterior t, este caracterizat prin relaţia funcţională

$$p_{jk}(s,t)=\sum_h p_{jh}(s,u)\,p_{hk}(u,t),$$

unde $j,\ h,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $s\leqslant u\leqslant t$ şi prin probabilităţile elementare

$$p_{jk}(s,\ s+\Delta)=\delta_j^k+\Delta a_{jk}(s,\Delta),$$

unde

$$\delta_j^k=\begin{cases}0, & \text{dacă } k=j\\ 1, & \text{dacă } k\neq j.\end{cases}$$

Funcţiile $a_{jk}(s,\Delta)$ sînt continue în s şi Δ pentru $s\leqslant u\leqslant T$, iar pentru Δ în vecinătatea pozitivă a lui $\Delta=0$, şi satisfac şi inegalităţile:

$$a_{jk}\begin{cases}\geqslant 0, & \text{dacă } k=j\\ \leqslant 0, & \text{dacă } k\neq j,\end{cases}\qquad \sum_k a_{jk}(s,\Delta)=0.$$

Aceste inegalităţi se datoresc faptului că

$$0\leqslant p_{jk}(s,t)\leqslant 1,\quad \sum_k p_{jk}(p,t)=1.$$

Funcţiile $p_{jk}(s,t)$ sînt soluţiile *sistemelor diferenţiale ale lui A. N. Kolmogorov*

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial t}=\sum_h \Pi_h(t)\,a_{hk}(t),\quad t>s \tag{3}$$

cu condiţiile la limită

$$\Pi_k(s)=\delta_j^k \quad (h,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m);$$

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial s}=-\sum_h a_{jk}(s)\,\theta_h(s),\quad s<t \tag{4}$$

$$\theta_j(t)=\delta_j^k.$$

PROBLEME

1. Se fac observaţii asupra vremii în n zile consecutive. Se înseamnă cu s o zi în care cade ploaie şi cu f o zi în care nu cade ploaie.

Să presupunem că observaţiile asupra vremii formează un lanţ Markov cu două stări. Atunci $P(s,s)$ este probabilitatea să cadă ploaie mîine, dacă a plouat azi, $P(s,f)$ este probabilitatea să nu cadă ploaie mîine, dacă a căzut azi, $P(f,f)$ este probabilitatea să nu cadă ploaie mîine, dacă nu a căzut azi şi $P(f,s)$ este probabilitatea să cadă ploaie mîine, dacă nu a căzut azi.

Să se determine probabilităţile condiţionate ale lanţului [1]).

Soluţie. Să însemnăm cu

$p_1(s)$ — probabilitatea ca în prima observaţie timpul să fie cel prezis

şi

$p_1(f)$ — probabilitatea ca în prima observaţie timpul să nu fie cel prezis.

În general, pentru $k=1, 2, \ldots, n$ notăm cu

$p_k(s)$ — probabilitatea succesului în a k-a observaţie

şi

$p_k(f)$ — probabilitatea insuccesului în a k-a observaţie (în prezicerea vremii).

Probabilităţile $p_k(s)$ satisfac relaţiile următoare:

$$p_k(s)=p_{k-1}(s)\cdot P(s,s)+p_{k-1}(f)\cdot P(f,s)=$$

$$=p_{k-1}(s)\cdot P(s,s)+[1-p_{k-1}(s)]\cdot[1-P(f,f)]=$$

$$=p_{k-1}(s)\cdot[P(s,s)+P(f,f)-1]+[1-P(f,f)]$$

care sînt relaţiile de recurenţă pentru probabilităţile $p_k(s)$.

Vom presupune că

$$|P(s,s)+P(f,f)-1|<1.$$

Rezultă pentru $p_k(s)$, $k=1, 2, \ldots, n$ valoarea

$$p_k(s)=\left[p_1(s)-\frac{1-P(f,f)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right][P(f,f)+P(s,s)-1]^{k-1}+$$

$$+\left[\frac{1-P(f,f)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right].$$

[1]) Vezi [26].

Schimbînd rolul lui s cu f, obținem pentru $p_k(f)$ valoarea:

$$p_k(f)=\left[p_1(f)-\frac{1-P(s,s)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right]\cdot[P(s,s)+P(f,f)-1]^{k-1}+$$
$$+\left[\frac{1-P(s,s)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right].$$

Să introducem probabilitățile condiționate:

$P_k(s,s)$ — probabilitatea condiționată ca să avem o prezicere bună a vremii în a $k+1$ observație, dacă am avut succes în prima observație

$P_k(s,f)$ — probabilitatea condiționată ca să avem o prezicere falsă în a $k+1$ observație, știind că am avut succes în prima observație.

Analog se introduc probabilitățile condiționate $P_k(f,f)$ și $P_k(f,s)$ cu proprietățile

$$P_k(s,f)=1-P_k(s,s);\quad P_k(f,s)=1-P_k(f,f).$$

Să determinăm formulele de recurență pentru probabilitățile $P_k(s,s)$ și $P_k(f,f)$.

Formulele de recurență pentru probabilitățile $P_k(s,s)$ sînt:

$$P_k(s,s)=P_{k-1}(s,s)\cdot P(s,s)+P_{k-1}(s,f)\cdot P(f,s)=$$
$$=P_{k-1}(s,s)\cdot P(s,s)+[1-P_{k-1}(s,s)][1-P(f,f)]=$$
$$=P_{k-1}(s,s)\cdot[P(s,s)+P(f,f)-1]+[1-P(f,f)],$$

de unde, făcînd $k=1, 2, \ldots, k$, obținem

$$P_k(s,s)=\left[P_1(s,s)-\frac{1-P(f,f)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right][P(s,s)+P(f,f)-1]^{k-1}+$$
$$+\left[\frac{1-P(f,f)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right]$$

care se poate scrie încă sub forma

$$P_k(s,s)=\frac{1-P(s,s)}{2-P(s,s)-P(f,f)}[P(s,s)+P(f,f)-1]^k+$$
$$+\left[\frac{1-P(f,f)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right].$$

Schimbînd rolul lui s și f, obținem

$$P_k(f,f)=\frac{1-P(f,f)}{2-P(s,s)-P(f,f)}[P(s,s)+P(f,f)-1]^k+$$
$$+\left[\frac{1-P(s,s)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right].$$

Folosind relaţiile dintre probabilităţile condiţionate

$$P_k(s,f)=1-P_k(s,s) \quad \text{şi} \quad P_k(f,s)=1-P_k(f,f)$$

obţinem:

$$P_k(s,f)=\frac{1-P(s,s)}{2-P(s,s)-P(f,f)}[P(s,s)+P(f,f)-1]^k+$$

$$+\left[\frac{1-P(s,s)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right].$$

$$P_k(f,s)=\frac{1-P(f,f)}{2-P(s,s)-P(f,f)}[P(s,s)+P(f,f)-1]^k+$$

$$+\left[\frac{1-P(f,f)}{2-P(s,s)-P(f,f)}\right].$$

2. Să considerăm un sistem de comunicaţii care transmite semnele 0 şi 1. Fiecare semn transmis trece prin trei stadii (etaje); pentru fiecare stadiu există probabilitatea p ca semnul care a intrat să rămînă neschimbat cînd iese. Să presupunem că sistemul constă din trei stadii. Care este probabilitatea ca un semn care a intrat 0 să fie

a) transmis în al treilea stadiu tot ca 0,

b) în fiecare stadiu să fie transmis tot ca 0 [1]).

Soluţie. In observarea trecerii semnului prin sistemul de comunicaţii vom considera sistemul format cu patru mărimi (z_1, z_2, z_3, z_4), în care prima componentă ia valoarea 1 sau 0 după cum semnul a intrat în sistem este 1 sau 0. Pentru $i=2, 3, 4$, z_i este egal cu 1 sau 0 după cum semnul care a ieşit în al i-lea stadiu este 1 sau 0.

In exerciţiul precedent, vom face pe s egal cu 1 şi pe f egal cu 0; presupunem că

$$P(0,0)=P(1,1)=p.$$

Probabilitatea ca semnul intrat în sistem ca 0 să fie transmis în al treilea stadiu tot ca 0 este dată de

$$P_3(0,0)=\frac{1-P(0,0)}{2-P(0,0)-P(1,1)}[P(0,0)+P(1,1)-1]^3+$$

$$+\frac{1-P(1,1)}{2-P(0,0)-P(1,1)}=\frac{1-p}{2-2p}(2p-1)^3+\frac{1-p}{2-2p}=\frac{1}{2}[1+(2p-1)^3].$$

---

[1]) Vezi [26].

Dacă $p=\frac{1}{3}$, atunci

$$P_3(0,0)=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]=\frac{13}{27}.$$

Probabilitatea ca un semn intrat în sistem ca 0 să fie transmis în fiecare stadiu ca 0 este dată de

$$P(0,0)\cdot P(0,0)\cdot P(0,0)=p^3=\frac{1}{27}.$$

3. Să presupunem că în exercițiul precedent sistemul este un mecanism aleator și că semnul „0" este ales cu probabilitatea $\frac{1}{3}$ și semnul 1 cu probabilitatea $\frac{2}{3}$. Care este probabilitatea condiționată ca în al treilea stadiu semnul să fie „0" dacă în sistem a intrat 0.

Soluție. Probabilitatea condiționată ca un semn transmis de stadiul al treilea să fie 0 știind că a intrat în sistem 0 este

$$\frac{p_1(0)\,P_3(0,0)}{p_4(0)}.$$

Numărătorul reprezintă probabilitatea ca primul semn intrat să fie 0 și al patrulea semn intrat să fie tot 0, iar $p_4(0)$ este probabilitatea ca semnul al patrulea să fie 0. Presupunînd că

$$P(1,1)=P(0,0)=\frac{1}{3},\quad p_1(0)=\frac{1}{3},\quad p_1(1)=\frac{2}{3},$$

rezultă că

$$p_4(0)=\left[p_1(0)-\frac{1-P(1,1)}{2-P(0,0)-P(1,1)}\right][P(0,0)+P(1,1)-1]^3+$$

$$+\frac{1-P(1,1)}{2-P(0,0)-P(1,1)}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{2}=\frac{41}{81}.$$

Probabilitatea căutată este

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{27}\cdot\frac{81}{41}=\frac{13}{41}.$$

4. Fie A, B, C, D patru persoane; fiecare spune adevărul o dată la trei ori (independent). Persoana A afirmă că B neagă că C declară că D este un mincinos. Care este probabilitatea că D va spune adevărul?

Soluție. Să considerăm sistemele de puncte de forma (z_1, z_2, z_3, z_4), unde z_i este egal cu 0 sau 1, după cum D este

cinstit sau mincinos, z_2 este egal cu 0 sau 1 după cum starea reprezentată de C implică că D este cinstit sau mincinos, z_3 este egal cu 0 sau 1 după cum starea reprezentată de B implică că D este cinstit sau mincinos şi z_4 este egal cu 0 sau 1 după cum situaţia reprezentată de A implică că D este cinstit sau mincinos. Dacă în acest lanţ Markov

$$P(0,0)=P(1,1)=\frac{1}{3}, \quad p_1(0)=\frac{1}{3}, \quad p_1(1)=\frac{2}{3},$$

persoanele A, B, C, D, pot fi privite ca formînd un sistem de comunicaţii. Trebuie să căutăm probabilitatea condiţionată ca semnul intrat în sistem 0 să fie transmis de al treilea stadiu tot 0.

După exerciţiul precedent probabilitatea cerută este $\frac{13}{41}$.

5. Fie $E_0, E_1, \ldots, E_p$ stările prin care poate trece un sistem S. Să reprezentăm aceste stări prin puncte: E_0 prin centrul unui cerc γ, iar $E_1, E_2, \ldots, E_p$ prin vîrfurile unui poligon cu r laturi, înscris în cercul γ, $p=r+1$.

Să presupunem că probabilitatea ca sistemul S să rămînă în E_0 este $\frac{1}{2}$; probabilitatea ca din E_0 să treacă în oricare dintre stările $E_1, E_2, \ldots, E_p$ este $\frac{1}{2r}$ şi probabilitatea ca dintr-un punct de pe cerc, să treacă în E_0 este zero. O dată ajuns pe cerc, probabilitatea ca dintr-un punct de pe cerc să treacă într-un punct vecin (în sens direct) este $\frac{1}{2}$, iar să rămînă în acelaşi punct, tot $\frac{1}{2}$.

Acest sistem constituie un exemplu simplu de lanţ Markov. Se cere:

a) Să se calculeze matricea probabilităţilor de trecere pentru $p=2$ şi $p=3$.

b) Probabilităţile de trecere după n paşi.

c) Rădăcinile ecuaţiei caracteristice.

Soluţie. a) Pentru $p=2$, să notăm cu E_0, E_1, E_2, stările posibile ale lanţului. Probabilitatea ca să rămînă în E_0 este $\frac{1}{2}$; ca din E_0 să treacă în E_1 sau E_2 este $\frac{1}{4}$; ca din E_1 sau E_2 să treacă în E_0 este zero, iar probabilitatea ca o dată ajuns în E_1 sau E_2 să rămînă în acelaşi punct este zero. În sfîrşit, probabilitatea ca din E_1 să treacă în E_2 sau din E_2 în E_0 este tot $\frac{1}{2}$.

Deci matricea probabilităţilor de trecere este:

$$P=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{matrix}\right\|.$$

Pentru $p=3$ vom obţine

$$\Pi=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{matrix}\right\|.$$

Se observă că, într-adevăr, P şi Π sînt matrice stochastice (elementele sînt pozitive şi mai mici decît 1, iar suma elementelor de pe o linie este egală cu 1).

b) Lanţul Markov fiind omogen, matricea $\|p_{ij}(n)\|$ se obţine calculînd pe P^n (înmulţind matricea P cu ea însăşi de p ori). Vom găsi

$$P^n=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{matrix}\right\|$$

şi analog

$$\Pi^n=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2^n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\frac{1}{2^n}\\ 0 & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n+1)\frac{\pi}{3}\right) \quad \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n-1)\frac{\pi}{3}\right)\\ 0 & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n-1)\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\frac{\pi}{3}\right) \quad \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n+1)\frac{\pi}{3}\right)\\ 0 & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n+1)\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n-1)\frac{\pi}{3}\right) \quad \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\frac{\pi}{3}\right)\end{matrix}\right\|$$

c) Să notăm cu $D_1(\lambda)$ şi $D_2(\lambda)$ ecuaţiile caracteristice corespunzătoare, respectiv, matricelor P şi Π:

$$D_1(\lambda)=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

sau

$$\lambda(\lambda-1)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)=0$$

şi deci

$$\lambda=0,\quad \lambda=1,\quad \lambda=\frac{1}{2}.$$

Pentru $D_2(\lambda)$ avem

$$D_2(\lambda)=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

sau

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2(8\lambda^2-8\lambda+3)=0$$

şi deci

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2},\ \lambda_3,\lambda_4=\frac{2+i\sqrt{2}}{4}.$$

Se observă că

$$|\lambda_i|\leqslant 1.$$

6. Fie $P=\|p_{ij}\|$ matricea probabilităţilor de trecere a unui lanţ Markov omogen finit. Să se arate că ecuaţia caracteristică

$$P(\lambda)=\|\lambda E-P\|=0,$$

unde E este matricea unitate şi 0 matricea nulă, are rădăcina $\lambda_0=1$ şi orice altă rădăcină λ este în modul mai mică decît 1.

Soluție. Determinantul matricei $P(\lambda)$ este

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \dots & p_{2n} \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

unde avem

$$\sum_k p_{jk}=1.$$

Adunînd toate coloanele la prima, se obține

$$(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1 & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ 1 & p_{22}-\lambda & \dots & p_{2n} \\ 1 & p_{n2} & \dots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

de unde avem o rădăcină $\lambda_0=1$.

Pentru partea a doua, să asociem determinantului sistemul omogen:

$$(\lambda-p_{11})x_1+p_{12}x_2+\dots+p_{1n}x_n=0$$
$$p_{21}x_1+(\lambda-p_{22})x_2+\dots+p_{2n}x_n=0$$
$$p_{n1}x_1+p_{n2}x_2+\dots+(\lambda-p_{nn})x_n=0$$

sau

$$\lambda x_j=\sum_i x_i p_{ji} \quad (i,j=1,2,\dots,n).$$

Dacă λ' este o rădăcină a acestui sistem, atunci

$$|\lambda'|\sum_j|x_j|\leqslant\sum_j\sum_i|x_i|p_{ji}\leqslant\sum_i|x_i|\sum_j p_{ij}\leqslant\sum_i|x_i|$$

și deci $|\lambda'|\leqslant 1$.

7. Pe un cerc sînt situate într-o anume ordine punctele distincte A_1, A_2, A_3. Un punct mobil A se deplasează trecînd dintr-un punct A_h într-un punct vecin, sau A_{h-1}, sau A_{h+1}. Să se studieze ecuația caracteristică a procesului.

Soluție. Dacă notăm cu p_{ij} probabilitatea ca punctul mobil A să treacă din starea A_i în starea A_j, atunci $p_{jk}=0$, dacă $|j-k|\neq 1$, cînd $j\neq 1$ și $j\neq 3$, și

$$p_{11}=0, \quad p_{22}=0, \quad p_{33}=0.$$

Ecuația caracteristică este atunci

$$\begin{vmatrix} -s & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & -s & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & -s \end{vmatrix} = 0.$$

Cum $\sum_i p_{ij} = 1$, adunînd liniile și dînd $1-s$ factor comun, avem:

$$(1-s)\begin{vmatrix} -s & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & -s & p_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$(1-s)(s^2+s+p_{12}p_{23}p_{31}+p_{13}p_{32}p_{21}) = 0.$$

Dacă $s=1$ este rădăcină, ea nu este multiplă. Dacă există o rădăcină $s \neq 1$ cu modulul 1, ea poate să fie sau reală, și atunci este -1, iar

$$p_{12}p_{23}p_{31}+p_{13}p_{32}p_{21} = 0, \tag{1}$$

sau complexă (atunci există și conjugata ei de modul 1, iar produsul lor este 1) și deci

$$p_{12}p_{23}p_{31}+p_{13}p_{32}p_{21} = 1. \tag{2}$$

Pentru ca relația (1) să aibă loc, ambii termeni fiind nenegativi, trebuie ca

$$p_{12} \cdot p_{23} \cdot p_{31} = 0, \quad p_{13} \cdot p_{32} \cdot p_{21} = 0;$$

deci cel puțin una dintre probabilitățile

$$p_{12}, \quad p_{23}, \quad p_{31}$$

este nulă și una, egală cu 1.

Ecuația (2) se scrie, încă, dacă știm că $p_{12}+p_{13}=1$:

$$p_{12}(1-p_{23} \cdot p_{31})+p_{13}(1-p_{32} \cdot p_{21}) = 0;$$

deci vom avea:

$$p_{12}(1-p_{23} \cdot p_{31}) = 0, \quad p_{13}(1-p_{32}p_{21}) = 0.$$

În acest caz sau toate probabilitățile p_{12}, p_{23}, p_{31} sînt nule sau toate egale cu 1 și cazul nu are nimic aleator: punctul se depla-

sează în același sens din poziție în poziție; sau dacă coincid, una cu zero și alta cu 1, atunci aproape sigur punctul se află în poziția inițială din două în două mișcări.

8. Fie lanțul cu șase stări E_1, E_2, E_3, ..., E_6 și matricea probabilităților de trecere:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right\|.$$

Să se determine mulțimile finale și mulțimile de trecere.

Soluție. Aici avem două mulțimi finale: mulțimea C_1 formată cu stările E_1 și E_2 și mulțimea C_2 formată cu stările E_3 și E_4.

Din mulțimea stărilor formată cu punctele E_5, E_6 sistemul poate trece în una din mulțimile C_1 sau C_2, dar întoarcerea sistemului nu este posibilă $\left(\text{deoarece, de exemplu } p_{61}=\frac{1}{6}, \text{ dar } p_{16}=0\right)$ prin urmare mulțimea stărilor (E_5, E_6) este de trecere.

Schematic, matricea P se poate scrie sub forma

$$P=\left\| \begin{array}{ccc} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ A & B & C \end{array} \right\|,$$

unde P_1, P_2 înseamnă matricile probabilităților de trecere respectiv din E_1, E_2 și E_3, E_4. Matricea P^n va fi atunci o matrice de aceeași formă cu două mulțimi finale și o mulțime de trecere.

9. Fie dat lanțul cu șase stări $E_1, E_2, \ldots, E_6$ cu matricea de trecere

$$P=\begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Să se arate că lanțul este periodic.

Soluție. Din starea E_1 sistemul trece neapărat sau în starea E_2 sau în starea E_3. Din starea E_3 sau E_4 sistemul trece în una din stările E_4, E_5, E_6 și din fiecare dintre aceste trei stări sistemul se întoarce în starea întîi. Rezultă că sistemul are perioada 3. Mulțimea stărilor se împarte în trei clase: una formată cu (E_2, E_3), alta cu (E_4, E_5, E_6) și una cu starea (E_1).

Dacă calculăm puterile matricii P, avem:

$$P^2=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad P^3=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix};$$

apoi

$$P^4=P, \quad P^5=P^2 \quad \text{ș.a.m.d.}$$

10. Probabilităţile de trecere sînt date de matricea

$$\pi_1 = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{matrix} \right\|.$$

Care este numărul stărilor? Să se determine probabilitatea de trecere dintr-o stare în altă stare în doi paşi.

Soluţie. Numărul stărilor este 3. Pentru determinarea probabilităţilor de trecere vom folosi relaţia lui Chapman

$$P^{n+m}(i, k) = \sum_{h=1}^{r} P^n(i, h) P^m(h, k),$$

unde 1, 2, ..., r sînt stările corespunzătoare.

In cazul nostru,

$$P^2(i, k) = \sum_{h=1}^{3} P^1(i, h) P^1(h, k)$$

şi deci

$$P^2(1, 1) = \sum_{h=1}^{3} P^1(1, h) P^1(h, 1) = P^1(1, 1) P^1(1, 1) +$$

$$+ P^1(1, 2) P^1(2, 1) + P^1(1, 3) P^1(3, 1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$P^2(2, 1) = \sum_{h=1}^{3} P^1(2, h) P^1(h, 2) = P^1(2, 1) P^1(1, 2) +$$

$$+ P^1(2, 2) P^1(2, 2) + P^1(2, 3) P^2(3, 2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Şi în mod analog se calculează şi celelalte probabilităţi de trecere $P^2(1, 2)$, ..., $P^2(3, 3)$.

Observaţie. Ergodicitatea este verificată, deoarece matricea probabilităţilor de trecere are cel puţin o coloană pozitivă.

11. Probabilităţile de trecere ale unui lanţ Markov omogen sînt date de matricea

$$P=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 1-b & 0 & b \end{Vmatrix}$$

cu $0\leqslant a\leqslant 1$ şi $0\leqslant b\leqslant 1$. Să se determine probabilităţile de trecere dintr-o stare în alta în $n+1$ paşi. Ce devin aceste probabilităţi cînd $n\to\infty$?

Soluţie. Avem, notînd cu P^n probabilitatea de trecere în n paşi:

$$P^2(h,\ 2)=P^1(h,\ 1)\,P^1(1,\ 2)+P^1(h,\ 2)\,P^1(2,\ 2)+$$

$$+P^1(h,\ 3)\,P^1(3,\ 2)$$

sau

$$P^2(h,\ 2)=aP^1(h,\ 2).$$

Analog,

$$P^{n+1}(h,\ 2)=P^n(h,\ 1)\,P^1(1,\ 2)+P^n(h,\ 2)\,P^1(2,\ 2)+$$

$$+P^n(h,\ 3)\,P^1(3,\ 2)$$

sau

$$P^{n+1}(h,\ 2)=aP^n(h,\ 2).$$

Observînd că

$$P^n(h,\ 2)=P^{n-1}(h,\ 2)\cdot a,\ \ldots;\ P^2(h,\ 2)=P^1(h,\ 2)\,a,$$

zultă că

$$P^{n+1}(h,\ 2)=a^nP^1(h,\ 2).$$

In mod întru totul analog şi ţinînd seama că suma probabilităţilor de pe o linie oarecare a matricei este 1, vom obţine

$$P^{n+1}(h,\ 3)=b^nP^1(h,\ 3)$$

şi

$$P^{n+1}(h,\ 1)=1-a^nP^1(h,\ 2)-b^nP^1(h,\ 3).$$

Pentru a vedea ce devin aceste probabilităţi cînd $n\to\infty$, vom distinge mai multe cazuri.

1) $a=b=0$. In acest caz $P^{\infty}(h, 2)=0$, $P^{\infty}(h, 3)=0$, iar $P^{\infty}(h, 1)=1$. Deci

$$P^{\infty}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

2) $a=b=1$. Se observă imediat că

$$P^{\infty}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

3) $0<a<1$ şi $0<b<1$. In acest caz $P^{\infty}(h, 2)=0$, $P^{\infty}(h, 3)=0$, ar $P^{1}(h, 1)=1$ şi deci

$$P^{\infty}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4) Dacă $a=1$ şi $b=0$, avem

$$P^{\infty}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

12. Fie dat lanţul Markov cu matricea probabilităţilor de trecere

$$P=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Să se determine probabilităţile $p_{ij}^{(n)}$.

Soluţie. Probabilităţile $p_{ij}^{(n)}$ sînt soluţiile sistemului

$$x_j = s\sum_{k=1}^{r} p_{jk}x_k \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r) \tag{1}$$

$$y_m = s\sum_{k=1}^{r} y_k p_{km}\,. \tag{2}$$

In cazul de mai sus sistemul (1) are forma

$$x_1 = sx_4;\quad x_2 = sx_4;\quad x_3 = \frac{s}{2}(x_1+x_2);\quad x_4 = sx_3.$$

Putem alege factorul constant aşa fel ca $x_4 = 1$; atunci

$$x_1 = s,\quad x_2 = s,\quad x_3 = s^2,\quad x_4 = s^3;$$

rezultă, că $s^3 = 1$, deci $s_1 = 1$, $s_2 = \varepsilon$, $s_3 = \varepsilon^2$.

Soluţiile $x_j^{(n)}$, corespunzătoare acestor trei rădăcini, sînt obţinute din (x_1, x_2, x_3, x_4) şi sînt

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1);\quad (\varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ 1)\quad \text{şi}\quad (\varepsilon^2,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon,\ 1)$$

Din sistemul (2), avem

$$y_1 = \frac{s}{2}y_3,\quad y_2 = \frac{s}{2}y_3,\quad y_3 = sy_4,\quad y_4 = s(y_1+y_2).$$

Soluţiile corespunzătoare rădăcinilor de mai sus ale lui s sînt

$$(1,\ 1,\ 2,\ 2),\quad (\varepsilon,\ \varepsilon,\ 2,\ 2\varepsilon^2)\quad \text{şi}\quad (\varepsilon^2,\ \varepsilon^2,\ 2,\ 2\varepsilon).$$

Ştim că

$$p_{jk}^{(n)} = \sum_{l=1}^{r} c_l x_j^{(l)} y_k s_l^{-n}, \tag{3}$$

unde

$$1 = c_l\sum_{k=1}^{r} x_k^{(l)} y_k^{(l)}\,. \tag{4}$$

Din sistemul (4) obţinem

$$c_1 = \frac{1}{6},\quad c_2 = \frac{1}{6\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{6},\quad c_3 = \frac{1}{6\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{6},$$

și apoi din sistemul (3), deducem

$$p_{11}^{(n)}=p_{22}^{(n)}=\frac{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}}{6},$$

$$p_{13}^{(n)}=\frac{1+\varepsilon^{2n+2}+\varepsilon^{n+1}}{3},$$

$$p_{14}^{(n)}=\frac{1+\varepsilon^{2n+1}+\varepsilon^{n+2}}{3}.$$

Lanțul este periodic, cu perioada 3, deci pentru $n=4$ avem:

$$p_{11}^{(4)}=p_{22}^{(4)}=\frac{1+\varepsilon+\varepsilon^2}{6}=0,$$

$$p_{13}^{(4)}=\frac{1+\varepsilon+\varepsilon^2}{3}=0,$$

$$p_{14}^{(4)}=\frac{3}{3}=1.$$

13. Fie dat lanțul finit și omogen cu șase stări E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 și cu matricea probabilităților de trecere

$$P=\left\|\begin{array}{cccccc}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&0&0&0\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0\\ 0&0&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{5}&\frac{4}{5}&0&0\\ \frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{array}\right\|.$$

a) Să se calculeze probabilitatea λ_n, ca în n pași sistemul să treacă în mulțimea finală formată cu stările E_1, E_2.

b) Să se determine probabilitatea ca sistemul să intre în mulțimea finală E_1, E_2.

Soluție. Se vede că E_1, E_2 formează mulțimi finale; din ele sistemul nu poate trece în alte stări; la fel din stările E_3 și E_4.

Stările formate cu punctele E_5 şi E_6 formează mulţimi de trecere. Matricea P se poate scrie sub forma

$$P=\begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ U & V & T \end{Vmatrix};$$

dacă calculăm puterile matricei P, vom obţine

$$P^n=\begin{Vmatrix} A^n & 0 & 0 \\ 0 & B^n & 0 \\ U_n & V_n & T^n \end{Vmatrix};$$

unde A^n, B^n, T^n sînt puterile matricelor A, B, T.

Dacă notăm cu λ_n probabilitatea ca în n paşi sistemul să treacă în starea finală E_1, E_2, atunci probabilitatea ca sistemul să fie cel mult în n paşi în mulţimea E_1, E_2 este

$$p_{51}^{(n)}+p_{52}^{(n)}=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n. \tag{1}$$

Pentru determinarea probabilităţilor λ_n, vom observa că în $n-1$ paşi sistemul ajunge în stări diferite de E_1, E_2, adică în mulţimile de trecere E_5 şi E_6 (deoarece din mulţimile E_3, E_4 sistemul nu poate ieşi), în al n-lea pas sistemul trebuie să treacă în E_1 sau E_2; atunci

$$\lambda_n=p_{55}^{(n-1)}(p_{51}+p_{52})+p_{56}^{(n-1)}(p_{61}+p_{62})=\frac{1}{4}p_{55}^{(n-1)}+\frac{1}{3}p_{56}^{(n-1)},$$

deci λ_n este complet determinat de elementele matricei T^n. Cum

$$p_{55}^{(n-1)}=p_{56}^{(n-1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1},$$

rezultă

$$\lambda_n=\frac{7}{48}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}. \tag{2}$$

Pentru determinarea probabilităţilor din (1), vom observa că

$$p_{51}^{(n)}+p_{52}^{(n)}=\frac{7}{48}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1},$$

de unde deducem

$$\lim_{n\to\infty}(p_{51}^{(n)}+p_{52}^{(n)})=\frac{7}{48}\cdot\frac{\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}}=\frac{5}{48}.$$

Deci probabilitatea ca sistemul să intre în mulțimea finală este $\frac{5}{48}$.

14. Fie dat lanțul cu șase stări pentru care matricea probabilităților de trecere este

$$P=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Să se determine probabilitatea ca sistemul să intre și să rămînă în stările E_1 și E_5.

Soluție. Din matricea P se vede că fiecare din stările E_1 și E_5 formează mulțimi finale. Dacă din matrice scoatem prima și a cincea coloană, avem

$$T=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Calculînd puterea T^n, se obţin probabilităţile $p_{ij}^{(n)}$. Probabilităţile p_{jk} verifică sistemul

$$x_j = s\sum_{k=1}^{n} p_{jk}x_k$$

care pentru matricea P devine

$$\begin{cases} x_1 = \frac{s}{4}(2x_1 + x_2), \quad x_2 = \frac{s}{8}(2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4), \\ x_3 = \frac{s}{4}(x_2 + 2x_3), \quad x_4 = sx_2. \end{cases} \tag{1}$$

Sistemul acesta are soluţii nebanale numai dacă determinantul coeficienţilor este nul, adică dacă s verifică ecuaţia de gradul al patrulea

$$\begin{vmatrix} \frac{s}{2}-1 & \frac{s}{4} & 0 & 0 \\ \frac{s}{4} & \frac{s}{4}-1 & \frac{s}{4} & \frac{s}{8} \\ 0 & \frac{s}{4} & \frac{s}{2}-1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Această ecuaţie are rădăcinile:

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = \sqrt{5} - 1, \quad s_4 = -\sqrt{5} - 1,$$

cărora le corespund soluţiile sistemului (1) pentru $x_n^{(r)}$:

$(1, 0, -1, 0)$; $(1, -1, 1, -4)$; $(1, s_3, 1, s_3^2)$; $(1, s_4, 1, s_4^2)$.

Sistemul de ecuaţii liniare pentru determinarea lui $y_k^{(r)}$,

$$y_m = s\sum_{k=1}^{n} y_k p_{km},$$

are soluţiile:

$$(1, 0, -1, 0), \quad (1, -1, 1, -1/2),$$
$$(1, s_3, 1, s_3^2/8), \quad (1, s_4, 1, s_4^2/8).$$

Din sistemul

$$1 = c_r \sum_{k=1}^{n} x_k^{(r)} \cdot y_k^{(r)},$$

determinăm constantele c_r:

$$c_1=\frac{1}{2},\quad c_2=\frac{1}{5},\quad c_3=\frac{s_4^2}{40},\quad c_4=\frac{s_3^2}{40}.$$

Din sistemul liniar

$$p_{jk}^{(n)}=\sum_{r=1}^{4} C_r\cdot x_j^{(r)}y_k^{(r)}s_r^{-n},\qquad j,\ k=2,\ 3,\ 4,\ 6,$$

obținem probabilitățile de trecere între punctele diferite de E_1 și E_5.

Pentru ca în al n-lea pas sistemul să fie în E_1, trebuie ca în al $n-1$-lea pas sistemul să fie sau în E_2 sau în E_3; probabilitatea este, atunci,

$$p_{j2}^{(n-1)}\cdot\frac{1}{4}+p_{j3}^{(n-1)}\cdot\frac{1}{6}.$$

În mod analog, probabilitatea ca sistemul, în al n-lea pas, să fie în E_5 este

$$p_{j3}^{(n-1)}\cdot\frac{1}{16}+p_{j4}^{(n-1)}\cdot\frac{1}{4}.$$

Făcînd suma seriilor cu termenii generali de mai înainte se obțin probabilitățile cerute.

15. *Amestecarea urnelor* [1]). Se dau două urne U și V care conțin în total A bile albe și N bile negre. În urna U sînt u bile și în urna V, v bile. Se extrage la întîmplare o bilă din U și una din V și punem prima în urna V și pe a doua în urna U. Notînd prin C_b compoziția urnelor cînd în U se află b bile albe, să se determine probabilitățile ca, plecînd de la compoziția C_h, să obținem după $m+n$ operații compoziția C_k.

Soluție. Să presupunem că după un anumit număr de operații, în urna U avem b bile albe; atunci celelalte $u-b$ bile sînt negre. În urna V, vom avea $A-b$ bile albe și $N-u+b=v-A+b$ bile negre; deci cunoașterea numărului de bile albe din urna U determină unic compoziția celor două urne. Se notează această compoziție cu C_b. Totdeauna

$$A+N=u+v.$$

Observăm că dacă $N\geqslant u$, atunci $A\leqslant v$ și b poate lua una din valorile 0, 1, 2, ..., r, unde $r=\min(A, u)$. În cazul în care $N<u$, definim structura urnelor prin numărul bilelor negre.

[1]) Vezi [27].

Vom însemna prin $P_{hj}^{(n)}$ probabilitatea ca, plecînd de la compoziţia C_h, să ajungem în n extracţii la compoziţia C_j şi cu $P_{jk}^{(m)}$ probabilitatea ca, plecînd de la compoziţia C_j, să ajungem după m operaţii la compoziţia C_k, indicele j putînd lua una din valorile 0, 1, 2, ..., r.

După teorema probabilităţilor compuse avem

$$P_{hk}^{(m+n)} = \sum_{j=0}^{r} P_{hj}^{(n)} \cdot P_{jk}^{(m)}.$$

Vom nota cu $p_{ij} = P_{ij}^{(1)}$; scriind această formulă pentru $n-1$ şi $m=1$, avem

$$P_{hk}^{(n)} = \sum_{j=0}^{r} P_{hj}^{(n-1)} \cdot p_{jk} = \sum_{j=0}^{r} p_{hj} \cdot P_{jk}^{(n-1)}.$$

Dacă se cunosc probabilităţile (p_{ij}), atunci putem calcula $P_{hk}^{(2)}$, ...

La fiecare operaţie numărul bilelor albe variază cu o unitate, deci

$$p_{ij} = 0, \quad \text{dacă} \quad |i-j| > 1,$$

iar pentru probabilităţile $P_{ij}^{(n)}$ avem proprietăţile:

$$P_{ij}^{(n)} \geqslant 0, \quad \text{dacă} \quad |i-j| \leqslant n,$$

$$P_{ij}^{(n)} = 0, \quad \text{dacă} \quad |i-j| > n.$$

Să presupunem că avem compoziţia C_l; probabilitatea de a scoate din U o bilă albă este $\frac{l}{u}$, iar din V este $\frac{A-l}{v}$; atunci, urmînd legea de extracţie,

$$p_{l,\,l+1} = \left(1 - \frac{l}{u}\right) \cdot \left(\frac{A-l}{v}\right)$$

şi

$$p_{l,\,l-1} = \frac{l}{u} \cdot \left(1 - \frac{A-l}{v}\right),$$

iar

$$p_{l,\,l} = \frac{l}{u}\left(\frac{A-l}{v}\right) + \left(1 - \frac{l}{u}\right)\left(1 - \frac{A-l}{v}\right).$$

Se vede că

$$1 = p_{l,\,l-1} + p_{l,\,l} + p_{l,\,l+1}.$$

Observație. Dacă numărul bilelor de o anumită culoare nu este egal cu numărul bilelor dintr-o urnă, atunci $p_{ij} \neq 0$, pentru $|i-j| \leqslant 1$. Dacă nu avem această condiție îndeplinită, atunci $p_{rr}=0$. Vom mai observa că, în general,

$$p_{i,\,i-1}+p_{ii}+p_{i,\,i+1} \neq p_{i-1,\,i}+p_{ii}+p_{i+1,\,i}.$$

Într-adevăr, primul membru este egal cu 1, iar al doilea este egal cu

$$\frac{(1+u)(1+v)+1}{uv} > 1, \qquad (0<i<r).$$

Problema aceasta este un exemplu de lanț cu un număr finit de stări, regulat, deoarece matricea

$$\| P_{ij}^{(n-1)} \| \qquad i, j=1, 2, \ldots$$

are toate elementele sale pozitive. Rezultă, atunci, că există limitele

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = P_j,$$

independente de starea inițială.

16. În problema precedentă, notînd cu $Y_h^{(n)}$ proporția de bile albe în urna U după n extracții și știind că la început au fost h bile albe, să se determine valoarea limită a variabilei aleatoare $Y_h^{(n)}$ cînd $n\to\infty$.

Soluție. Vom observa că numărul bilelor albe în urna U este $uY_h^{(n)}$ și că variabila aceasta este definită astfel:

$$uY_h^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \ldots & r \\ P_{h0}^{(n)} & P_{h1}^{(n)} & P_{h2}^{(n)} \ldots & P_{hr}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Valoarea medie a variabilei $Y_h^{(n)}$ este

$$M(Y_h^{(n)}) = \sum_{k=0}^{h} \frac{k}{u} P_{hk}^{(n)}.$$

Știind că

$$\lim_{n\to\infty} P_{hk}^{(n)} = P_k,$$

rezultă că $M(Y_h^{(n)})$ tinde către o limită M cînd n tinde către ∞ și

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{u} P_k.$$

Ca şi în cazul lanţurilor regulate, probabilităţile P_k sînt soluţiile sistemului

$$x_k = x_{k-1} \cdot p_{k-1,\,k} + x_k \cdot p_{kk} + x_{k+1} \cdot p_{k+1,\,k}, \tag{1}$$

unde

$$p_{k,\,k-1} + p_{kk} + p_{k,\,k+1} = 1 \quad \text{şi} \quad \sum_j p_j = 1.$$

Sistemul (1) se poate scrie

$$x_{k+1} = \frac{x_k(1-p_{kk}) - x_{k-1} \cdot p_{k-1,\,k}}{p_{k+1,\,k}}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Pentru $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r$, avem

$$x_1 = \frac{x_0 \cdot p_{01}}{p_{10}} = P_1,$$

$$x_2 = \frac{x_0 p_{01} p_{12}}{p_{10} p_{21}} = P_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_k = \frac{x_0 p_{01} p_{12} \cdots p_{k-1,\,k}}{p_{10} p_{21} \cdots p_{k,\,k-1}} = P_k.$$

Am văzut că dacă $A \leqslant v$,

$$p_{i,\,i+1} = \left(1 - \frac{i}{u}\right)\left(\frac{A-i}{v}\right), \quad p_{i,\,i-1} = \frac{i}{u} \cdot \left(1 - \frac{A-i}{v}\right),$$

$$p_{ii} = \frac{i}{u}\left(\frac{A-i}{v}\right) + \left(1 - \frac{i}{u}\right)\left(1 - \frac{A-i}{v}\right).$$

Înlocuind în egalităţile de mai sus, obţinem

$$P_1 = x_0 \frac{C_A^1 \cdot C_u^1}{C_{v-A+1}^1}, \quad P_k = x_0 \frac{C_A^k \cdot C_u^k}{C_{v-A+k}^k} = x_0 \frac{C_A^k C_N^{u-k}}{C_N^u}.$$

Cum

$$\sum_j P_j = 1,$$

rezultă că

$$\frac{x_0}{C_N^u} \sum_j C_A^j C_N^{u-j} = 1.$$

Dacă notăm cu $T=A+N$, deducem că

$$x_0=\frac{C_N^u}{C_T^u}$$

şi deci

$$P_k=\frac{C_A^k C_N^{u-k}}{C_T^u}=\frac{C_u^k C_v^{A-k}}{C_T^A}.$$

Pentru valoarea medie M, obţinem

$$M=\sum_{k=0}^{r}\frac{k}{u}\cdot\frac{C_u^k\cdot C_v^{A-k}}{C_T^A}=\sum_{k=0}^{r}\frac{C_{u-1}^{k-1}\cdot C_v^{A-k}}{C_T^A}.$$

Folosind din nou egalitatea

$$\sum_k P_k=1,$$

găsim

$$\sum_{k=0}^{r} C_u^k\cdot C_v^{A-k}=C_T^A=C_{u+v}^A.$$

Dacă înlocuim pe u prin $u-1$, şi A prin $A-1$, obţinem

$$\sum_{k=1}^{r} C_{u-1}^{k-1}\cdot C_v^{A-k}=C_{u+v-1}^{A-1}=C_{T-1}^{A-1}.$$

Deci

$$M=\frac{C_{T-1}^{A-1}}{C_T^A}=\frac{A}{A+N};$$

acest rezultat constituie *teorema lui Laplace.*

17. In exerciţiul precedent să se calculeze dispersia $\mu_h^{(n)}$ a variabilei $Y_h^{(n)}$ şi de asemenea

$$\lim_{n\to\infty}\mu_h^{(n)}.$$

Soluţie. Abaterea medie pătratică a variabilei $Y_h^{(n)}$ este prin definiţie:

$$[\mu_h^{(n)}]^2=M\left[\left\{Y_h^{(n)}-M\left(Y_h^{(n)}\right)\right\}^2\right].$$

Dacă ţinem seama de notaţia din exerciţiului precedent, k fiind numărul de bile albe în U după n extracţii, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left[\mu_h^{(n)}\right]^2=\lim_{n\to\infty}\sum_k\left(k-M\left(Y_h^{(n)}\right)\right)^2\cdot P_{hk}^{(n)}=\sum_k(k-\bar{k})^2\cdot P_k,$$

unde $\bar{k}=\frac{A}{A+N}u$.

Rezultă de aici că limita nu depinde de h; vom arăta atunci că

$$\mu^2=\lim_{n\to\infty}\left[\mu_h^{(n)}\right]^2$$

şi

$$\mu^2=\sum_k(k-\bar{k})^2P_k=\sum_k k^2\cdot P_k-(\bar{k})^2.$$

Inlocuind valorile pentru probabilităţile P_k, avem

$$\mu^2=\sum_k k^2\cdot\frac{C_u^k\cdot C_v^{A-k}}{C_T^A}-(\bar{k})^2=\sum_k k(k-1)\frac{C_u^kC_v^{A-k}}{C_T^A}+k\frac{C_u^kC_v^{A-k}}{C_T^A}-(\bar{k})$$

şi observînd că penultimul termen din membrul al doilea este $\bar{k}$, avem

$$\mu^2=\sum_k\cdot\frac{C_{u-2}^{k-2}\cdot C_v^{A-k}}{C_T^A}u(u-1)+\bar{k}-(\bar{k})^2.$$

Folosind identitatea

$$\sum_k C_{u-2}^{k-2}C_v^{A-k}=C_{u+v-2}^{A-2},$$

avem

$$\mu^2=\frac{C_{u+v-2}^{A-2}}{C_T^A}u(u-1)+\bar{k}-(\bar{k})^2.$$

Inlocuind valoarea lui $\bar{k}$, obţinem

$$\mu^2=\frac{ANuv}{T^2(T-1)}.$$

Dacă T este suficient de mare, atunci $\mu=\sqrt{\frac{ANuv}{T^2}}$. Observînd că în mod necesar

$$A\cdot N\leqslant\frac{T^2}{4}\quad\text{şi}\quad u\cdot v\leqslant\frac{T^2}{4},$$

atunci

$$\mu^2\leqslant\frac{T^2}{16(T-1)}$$

18. Fie dat un lanţ Markov omogen şi finit şi

$$\left\| \begin{matrix} p_{11}(m) & p_{12}(m) & \dots & p_{1n}(m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(m) & p_{n2}(m) & \dots & p_{nn}(m) \end{matrix} \right\| \qquad (m \geqslant 0)$$

matricea probabilităţilor.

Să se arate că şirul $(p_{jh}(n))_n$ converge către o limită pentru orice h, dacă şi numai dacă

$$\inf_h \sup_j p_{jh}(n) = \sup_h \inf_j p_{jh}(n).$$

Soluţie. Pentru probabilităţile de trecere ale lanţului avem relaţiile:

$$\sum_{h=1}^{n} p_{jh}(m) = 1$$

pentru orice j şi h şi

$$\sum_{h=1}^{n} p_{jh}(l) \cdot p_{hk}(m) = p_{jk}(l+m)$$

pentru orice j, k, l, m. Vom nota

$$\bar{p}_h(n) = \sup_j p_{jh}(n); \quad p_1(n) = \inf_h \bar{p}_h(n);$$

$$p_h(n) = \inf_j p_{jh}(n); \quad p_2(n) = \sup_h p_h(n);$$

rezultă că

$$\bar{p}_h(n) \geqslant p_h(n)$$

şi prin urmare

$$p_1(n) \geqslant p_2(n). \tag{1}$$

Funcţia $n \to \bar{p}_h(n)$ este descrescătoare şi funcţia $n \to p_h(n)$ este crescătoare. Într-adevăr,

$$\bar{p}_h(n) = \sup_j p_{jh}(n) = \sup_j \sum_s p_{js}(1)\, p_{sh}(n-1) \leqslant \bar{p}_h(n-1)$$

şi

$$p_h(n) = \inf_j p_{jh}(n) = \inf_j \sum_s p_{js}(1)\, p_{sh}(n-1) \geqslant p_h(n-1).$$

Să presupunem că şirul $(p_{jh}(n))_n$ are limita p_h; atunci

$$-\varepsilon \leqslant p_h - p_{jh}(n) \leqslant \varepsilon, \qquad \text{pentru } n \geqslant N(\varepsilon)$$

sau

$$p_{jh}(n)-\varepsilon \leqslant p_h \leqslant \varepsilon + p_{jh}(n).$$

De aici rezultă

$$p_1(n)-\varepsilon \leqslant p_h \leqslant \varepsilon + p_2(n);$$

cum ε este arbitrar, avem

$$p_1(n) \leqslant p_2(n) \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem

$$p_1(n)=p_2(n).$$

Pentru a demonstra suficienţa, vom presupune că există un punct h_0 în care şirul $(p_{jh}(n))_n$ nu-i convergent; prin urmare, în punctul h_0, pentru fiecare j, şirul nu este Cauchy; de aici rezultă că

$$p_1(n) > p_2(n)$$

ceea ce contrazice ipoteza.

19. Fie un şir de observaţii Bernoulli; vom spune că în momentul t sistemul este în starea E_k ($k=0, 1, 2, \ldots$), dacă observaţiile cu numerele $t, t-1, t-2, \ldots, t-k+1$ reprezintă succes şi a $t-k-a$ observaţie reprezintă insucces. Adică, vom spune că în momentul n sistemul este în starea E_0, dacă rezultatul celei de a n-a observaţie este insucces; vom presupune că în momentul 0 sistemul este în starea 0. Avem atunci un lanţ Markov cu stările $E_0, E_1, \ldots$, cu probabilităţile de trecere

$$p_{j,\,j+1}=p, \quad p_{j,\,0}=q, \quad p_{jk}=0,$$

dacă k este diferit de 0 şi $j+1$. Matricea probabilităţilor de trecere este

$$\pi = \begin{Vmatrix} q & p & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & \ldots \\ q & 0 & 0 & p & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}.$$

Notînd

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = p_k,$$

să se determine valorile probabilităţilor p_k.

Soluţie. Probabilităţile limită p_k, (după teorema ergodică) verifică sistemul de ecuaţii liniare

$$x_k = \sum_j x_j p_{jk} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

În cazul nostru, pentru $k=0$, sistemul ia forma

$$x_0=(x_0+x_1+\ldots)\,q=q.$$

Dacă $k\geqslant 1$,

$$x_k=x_{k-1}\cdot p,$$

iar soluția are forma

$$x_k=q^k\cdot p$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}=q^k\cdot p.$$

20. Se dă densitatea $\varphi(x, y)$ cu $0\leqslant x\leqslant 1$ și $0\leqslant y\leqslant 1$ care satisface condițiile

$$\int_0^1 \varphi(x, y)\,dy=1 \quad \text{și} \quad |\varphi(x, y)|\leqslant M.$$

Să se arate că

$$\varphi_n(x, y)\leqslant M. \tag{1}$$

Soluție. Notăm $W=[0, 1]$. Să definim iteratele:

$$\varphi_n(x, y)=\int_W \varphi_q(x, z)\,\varphi_p(z, y)\,dz,$$

unde $p+q=n$ și $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$.

Să arătăm, acum, că

$$\varphi_n(x, y)\leqslant M.$$

Avem

$$\varphi_n(x, y)=\int_W \varphi_{n-1}(x, z)\,\varphi_1(z, y)\,dz\leqslant M\int_W \varphi_{n-1}(x, z)\,dz.$$

Pentru a demonstra inegalitatea (1), rămîne să arătăm că

$$\int_W \varphi_{n-1}(x, z)\,dz=1.$$

Vom demonstra prin recurență. Avem

$$\int_W \varphi_n(x, y)\,dy=\int_W\left[\int_W \varphi_{n-1}(x, z)\,\varphi_1(z, y)\,dz\right]dy=$$

$$=\int_W dz\int_W \varphi_{n-1}(x, z)\,\varphi_1(z, y)\,dy,$$

conform teoremei lui Fubini. Deci

$$\int_W \varphi_n(x,\ y)\,dy = \int_W \varphi_{n-1}(x,\ z)\,dz \int_W \varphi_1(z,\ y)\,dy = \int_W \varphi_{n-1}(x,\ z)\,dz = 1,$$

deoarece am presupus că

$$\int_W \varphi_{n-1}(x,\ z)\,dz = 1.$$

21. Să se arate că dacă

$$A_{12} = A_{23} = A_{31} = A,$$
$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = -A,$$
$$A_{21} = A_{32} = A_{13} = 0$$

şi

$$P_{11}(t) = P_{22}(t) = P_{33}(t) = \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}At} \cos \alpha t + \frac{1}{3},$$

$$P_{12}(t) = P_{23}(t) = P_{31}(t) = e^{-\frac{3}{2}At}\left(\frac{1}{3}\sin \alpha t\right) + \frac{1}{3},$$

$$P_{21}(t) = P_{32}(t) = P_{13}(t) = \frac{1}{3} - e^{-\frac{3}{2}At}\left(\frac{1}{3}\sin \alpha t + \frac{1}{3}\cos \alpha t\right),$$

unde $\alpha = \frac{3}{2}$, atunci $P_{tk}(t)$ sînt probabilităţi corespunzătoare unui lanţ Markov continuu şi omogen.

Soluţie. Se vede că $P_{ii}(0) = 1$ şi $P_{ij}(0) = 0$; după un calcul simplu, deducem că

$$P_{11}(t) + P_{12}(t) + P_{13}(t) = 1,$$
$$P_{21}(t) + P_{22}(t) + P_{23}(t) = 1,$$
$$P_{31}(t) + P_{32}(t) + P_{33}(t) = 1.$$

Ne mai rămîne să arătăm că probabilităţile date verifică ecuaţia

$$\frac{dP_{tk}}{dt} = \sum_{j=1}^{3} P_{tj}(t)\, A_{jk}.$$

Avem

$$\frac{dP_{11}(t)}{dt} = -P_{11}(t)\, A + P_{12}(t) \cdot 0 + P_{13}(t)\, A.$$

Înlocuind, deducem

$$-Ae^{-\frac{3}{2}At}\cos\alpha t-\frac{2}{3}\alpha e^{-\frac{3}{2}At}\sin\alpha t=-A\left[\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}At}\cos\alpha t+\frac{1}{3}\right]+$$

$$+A\left[\frac{1}{3}-e^{-\frac{3}{2}At}\left(\frac{1}{3}\sin\alpha t+\frac{1}{3}\cos\alpha t\right)\right].$$

Știm că $\alpha=\frac{3}{2}$ și deci ecuația este verificată.

Analog se procedează și pentru celelalte valori $P_{ik}(t)$.

De aici rezultă că într-adevăr $P_{ik}(t)$ sînt probabilități corespunzătoare unui lanț Markov continuu și omogen.

22. Se dă

$$P_{11}(t)=p+qe^{-At},\quad P_{21}(t)=p-pe^{-At},$$
$$P_{12}(t)=q-qe^{-At},\quad P_{22}(t)=q+pe^{-At},$$

unde $A\geqslant 0$ și $p+q=1$, $p,\ q>0$.

Să se arate că $P_{ik}(t)$ sînt probabilități corespunzătoare unui lanț Markov.

Soluție. Rezultă imediat că

$$P_{11}(t)+P_{21}(t)=1,$$
$$P_{12}(t)+P_{22}(t)=1$$

și

$$P_{ij}(0)=\delta_{ij}.$$

Să arătăm acum că satisfac și relația lui Chapman

$$P_{11}(t)=P_{11}(u)\,P_{12}(s)+P_{12}(u)\,P_{21}(s)\qquad(u+s=t).$$

Avem

$$p+qe^{-At}=(p+qe^{-Au})(p+qe^{-As})+(q-qe^{-At})(p-pe^{-As})=$$
$$=p^2+pqe^{-Au}+pqe^{-As}+q^2e^{-A(u+s)}+pq-pqe^{-Au}-pqe^{-As}+$$
$$+pqe^{-A(u+s)}=p(p+q)+e^{-At}q(p+q)=p+qe^{-At}.$$

În mod întru totul analog se arată și pentru $P_{12}(t)$, $P_{21}(t)$, $P_{22}(t)$ că

$$P_{ij}(t)=\sum_{h=1}^{2}P_{ih}(u)\,P_{hj}(s)$$

și deci $P_{ij}(t)$ sînt probabilități corespunzătoare unui lanț.

23. Fie [1] $(\xi(t))_{t\in T}$ un proces pur discontinuu fără postacțiune. Să se arate că funcțiile de repartiție $F(t, x; \tau, y)$ verifică ecuațiile integro-diferențiale:

$$\frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial t} = p(t, x)\Big[F(t, x; \tau, y) - \int F(t, z; \tau, y) \times$$

$$\times \mathrm{d}_z \cdot P(t, x, z)\Big]$$

$$\frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial \tau} = -\int_{-\infty}^{y} p(t, z) \cdot \mathrm{d}_z F(t, x; \tau, y) + \int p(\tau, t) \times$$

$$\times P(\tau, z, y)\, \mathrm{d}_z F(t, x; \tau, z).$$

Soluție. Cele două ecuații se numesc *ecuațiile Feller—Kolmogorov.*

Un proces stochastic se numește *pur discontinuu* dacă

$$\xi(\tau) = k, \quad \text{pentru} \quad t < \tau < t + \Delta t$$

și

$$P(t;\ \xi(t) = x) = 1 - p(t, x)\,\Delta t + \theta(\Delta t),$$

unde

$$\lim_{t\to 0} \theta(\Delta t) = 0.$$

Deoarece ne mărginim la procese fără postacțiune, valorile funcției $\xi(t)$ luate după salt nu depind de valorile funcției înainte de salt.

Să însemnăm cu $P(t, x, y)$ probabilitatea condiționată a variabilei $\xi(t)$, dacă $\xi(t-0) = x$; atunci dacă $F(t, x; \tau, y)$ este funcția de repartiție, avem

$$F(t, x; \tau, y) = [1 - p(t, x)(\tau - t)] \cdot E(x, y) + (\tau - t) \cdot p(t, x) \times$$

$$\times P(t, x, y) + \theta(\tau - y), \tag{1}$$

unde

$$E(x, y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant x \\ 1, & y > x. \end{cases}$$

Vom presupune $p(t, x)$, $P(t, x, y)$ continue față de t și x și

$$\lim_{\tau\to t+0} F(t, x; \tau, y) = \lim_{t\to\tau-0} F(t, x, \tau, y) = E(x, y).$$

---

[1] Vezi [9].

Aplicînd ecuația generalizată a proceselor Markov, avem

$$F(t,\ x;\ \tau,\ y)=\int F(t+\Delta t,\ z;\ \tau,\ y)\cdot \mathrm{d}_z F(t,\ x;\ t+\Delta t,\ z).$$

Înlocuind aici $F(t,\ x;\ t+\Delta t,\ z)$ prin expresia dată de formula (1), avem

$$F(t,\ x;\ \tau,\ y)=\int F(t+\Delta t,\ z;\ \tau,\ y)\,\mathrm{d}_z\,(1-p\,(t,\ x)\,\Delta t+\theta\,(\Delta t))\times$$

$$\times E(x,\ z)+\int F(t+\Delta t,\ z;\ \tau,\ y)\,\mathrm{d}_z\,(p\,(t,\ x)\,\Delta t+\theta\,(\Delta t))\,P\,(t,\ x,\ z).$$

Cum însă

$$F(t+\Delta t,\ z;\ \tau,\ y)=\int F(t+\Delta t,\ z;\ \tau,\ y)\,\mathrm{d}_z E\,(x,\ z),$$

atunci

$$\frac{F(t+\Delta t,\ x;\ \tau,\ y)-F(t,\ x;\ \tau,\ y)}{\Delta t}=p\,(t,\ x)\,F(t+\Delta t,\ x;\ \tau,\ y)-$$

$$-p\,(t,x)\int F(t+\Delta t,\ z;\ \tau,\ y)\,\mathrm{d}_z P\,(t,\ x,\ z)+\theta\,(1);$$

trecînd la limită pentru $\Delta t\to 0$, se obține prima ecuație a sistemului, găsită de Kolmogorov. Pentru a doua ecuație obținută de Feller, vom scrie:

$$F(t,\ x;\ \tau+\Delta\tau,\ y)=\int F(\tau,\ z;\ \tau+\Delta\tau,\ y)\cdot \mathrm{d}_z F\,(t,\ x,\ \tau,\ z)=$$

$$=\int\left\{[1-p\,(\tau,\ z)\,\Delta\tau]\,E\,(z,\ y)+\Delta\tau\cdot p\,(\tau,z)\cdot P\,(\tau,\ z,\ y)+\theta\,(\Delta\tau)\right\}\times$$

$$\times \mathrm{d}_z F\,(t,\ x;\ \tau,z)=$$

$$=\int_{-\infty}^{y}\mathrm{d}_z F(t,\ x;\ \tau,\ z)-\int_{-\infty}^{y}p\,(\tau,\ z)\,\mathrm{d}_z F(t,\ x;\ \tau,\ z)+$$

$$+\Delta t\int p\,(\tau,\ z)\cdot P\,(\tau,\ z,\ y)\cdot \mathrm{d}_z F\,(t,\ x;\ \tau,\ z)+\theta\,(\Delta t).$$

Cum

$$\int_{-\infty}^{y}\mathrm{d}_z F\,(t,\ x;\ \tau,\ z)=F\,(t,\ x;\ \tau,\ y),$$

rezultă

$$\frac{F\,(t,\ x;\ \tau+\Delta\tau,\ y)-F\,(t,\ x;\ \tau,\ y)}{\Delta\tau}=-\int_{-\infty}^{y}p\,(\tau,\ z)\,\mathrm{d}_z F\,(t,\ x;\ \tau,\ z)+$$

$$+\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\int p\,(\tau,\ z)\,P\,(\tau,\ z,\ y)\,\mathrm{d}_z F\,(t,\ x;\ \tau,\ z)+\theta\,(1).$$

Trecînd la limită pentru $\Delta\tau\to 0$, se obține a doua ecuație a lui Feller.

24. Fie [1]) dat un proces stochastic pur discontinuu. Să se determine probabilitatea ca în intervalul de timp de la t la $\tau(t<\tau)$ sistemul să-și schimbe starea de n ori ($n=0, 1, 2, \ldots$).

Soluție. Să însemnăm prin $p_n(t, x, \tau)$ probabilitatea ca, plecînd din starea x la momentul t, pînă la momentul τ sistemul să-și schimbe de n ori starea. Rezolvăm întîi problema pentru $n=0$. Vom scrie relația

$$p_0(t, x, \tau)=p_0(t, x, \tau+\Delta\tau)+p_0(t, x, \tau)(1-p_0(t, x, \tau+\Delta\tau)) \quad (1)$$

în care evenimentul ca în intervalul t, τ, sistemul să rămînă în starea x l-am descompus în două evenimente complementare. Cum însă procesul este total discontinuu,

$$p_0(t, x, \tau+\Delta\tau)=1-p(\tau, x)\Delta\tau+\theta(\Delta\tau)$$

și relația (1) ne dau

$$\frac{p_0(t, x, \tau+\Delta\tau)-p_0(t, x, \tau)}{\Delta\tau}=-p_0(t, x, \tau)\cdot p(\tau, x)+\theta(1).$$

Dacă facem limita pentru $\Delta\tau\to 0$, avem ecuația

$$\frac{p_0(t, x, \tau)}{\partial\tau}=-p_0(t, x, \tau)p(\tau, x),$$

de unde obținem

$$p_0(t, x, \tau)=e^{-\int_t^\tau p(u, x)\,du}.$$

Pentru determinarea probabilităților $p_n(t, x, \tau)$ vom determina relații de recurență asupra lui n. Schimbarea de n ori a stării cu intervalul t, τ, se poate produce în următoarele moduri:

1) sistemul nu-și schimbă starea pînă în momentul s, $t<s<\tau$, cu probabilitatea $p_0(t, x, s)$;

2) în intervalul s, $s+\Delta s$ sistemul își schimbă o dată starea cu probabilitatea

$$p_1(s, x, s+\Delta s)=p(s, x)\Delta s+\theta(\Delta s);$$

[1]) Vezi [9].

3) probabilitatea ca noua stare, în care trece sistemul, să fie cuprinsă între y şi $y+\Delta y$ este egală cu

$$P(s,\ x,\ y+\Delta y)-P(s,\ x,\ y)=\Delta y P(s,\ x,\ y);$$

4) în intervalul $(s+\Delta s,\ \tau)$ sistemul îşi schimbă starea sa de $n-1$ ori cu probabilitatea $p_{n-1}(s+\Delta s,\ y,\ \tau)$. Atunci probabilitatea ca sistemul în intervalul $(t,\ \tau)$ să-şi schimbe starea de n ori este egală cu

$$p_n(t,\ x,\ \tau)=\int_t^\tau\int p_0(t,\ x,\ s)\cdot p(s,\ x)\cdot p_{n-1}(s,\ y,\ \tau)\,d_yP(s,\ x,\ y)\,ds=$$

$$=\int_t^\tau p_0(t,\ x,\ s)\cdot p(s,\ x)\left(\int p_{n-1}(s,\ y,\ \tau)\,d_yP(s,\ x,\ y)\right)ds;$$

dacă facem aici $n=1$, avem:

$$p_1(t,\ x,\ \tau)=\int_t^\tau p_0(t,\ x,\ s)\,p(s,\ x)\left(\int p_0(s,\ y,\ \tau)\,d_yP(s,\ x,\ y)\right)ds$$

(probabilitatea ca sistemul să-şi schimbe starea o dată în intervalul $t,\ \tau$).

25. Fie dat un proces pur discontinuu, cu $p(t,\ x)=a>0$. Să se calculeze probabilitatea ca în intervalul $0,\ \tau$ sistemul să-şi schimbe starea de n ori, ştiind că sistemul ia poziţii numere naturale şi

$$P(t,\ x,\ y)=\begin{cases}0, & \text{dacă } y\leqslant x\\ 1, & \text{dacă } y>x.\end{cases}$$

Soluţie. Din problema precedentă avem

$$p_0(t,\ x,\ \tau)=e^{-\int_t^\tau p(u,\ x)\,du}=e^{-a(\tau-t)},$$

iar din ultima ecuaţie, deducem pentru p_1:

$$p_1(t,\ x,\ \tau)=\int_t^\tau p_0(t,\ x,\ s)\,p(s,\ x)\,p_0(s,\ x+1,\ \tau)\,ds=$$

$$=a\int_t^\tau e^{-a(s-t)}\cdot e^{-a(\tau-s)}\,ds=a(\tau-t)\,e^{-a(\tau-t)}.$$

Pentru p_2 avem

$$p_2(t,\ x,\ \tau)=\int_t^\tau p_0(t,\ x,\ s)\cdot p(s,\ x)\,p_1(s,\ x+1,\ \tau)\,ds=$$

$$=\frac{a^2(\tau-t)^2}{2!}e^{-a(\tau-t)}.$$

şi

$$p_n(t,\ x,\ \tau)=\frac{a^n(\tau-t)^n}{n!}e^{-a(\tau-t)}.$$

Dacă facem $t=0,\ \ x=0,$ atunci

$$p_n(0,\ 0,\ \tau)=\frac{(a\tau)^n}{n!}e^{-a\tau}$$

şi se vede că probabilităţile $p_n(t,\ x,\ \tau)$ sînt legi Poisson.

Funcţia de repartiţie a procesului este

$$F(t,\ x,\ \tau,\ y)=\begin{cases}0, & \text{dacă} \quad y\leqslant 0\\ \sum\limits_{n<y}\dfrac{a^n(\tau-t)^n}{n!}e^{-a(\tau-t)}, & \text{dacă}\ y>0\end{cases}$$

şi este o soluţie a sistemului de ecuaţii Feller-Kolmogorov.

26. La momentul $t=0$, avem N atomi radioactivi. Probabilitatea de dezagregare în intervalul $(t,\ t+\Delta t)$ este egală cu

$$aN(t)\Delta t+\theta(\Delta t),$$

unde a este o constantă pozitivă şi $N(t)$ numărul atomilor nedezagregaţi la momentul t. Să se determine probabilitatea ca în intervalul de timp $(t,\ \tau)$ să se producă n dezagregări.

Soluţie. Acest exemplu fizic constituie un model de proces pur discontinuu; n poate lua numai valorile 0, 1, 2, ..., $N(t)$. Avem:

$$p(t,\ x)=\begin{cases}0, & \text{dacă}\quad x\leqslant 0\ \text{şi}\ \ x>N\\ a(N-x), & \text{dacă}\quad 0<x\leqslant N\end{cases}$$

$$P(t,\ x,\ y)=\begin{cases}0, & \text{dacă}\quad y\leqslant x\\ 1, & \text{dacă}\quad y>x.\end{cases}$$

Atunci după exemplul precedent, avem

$$p_0(0,\ 0,\ \tau)=e^{-\int_0^\tau p\,(t,\,0)\,dt}=e^{-aN\tau}$$

şi

$$p_0(t,\ k,\ \tau)=e^{-a\,(N-k)\,(\tau-t)}.$$

Pentru probabilităţile p_1, avem

$$p_1(0,\ 0,\ \tau)=\int_0^\tau p_0(0,\ 0,\ s)\,p\,(s,\ 0)\,p_0(s,\ 1,\ \tau)\,ds=Ne^{-aN\tau}[e^{a\tau}-1]$$

şi în general

$$p_n(0,\ 0,\ \tau)=C_N^n e^{-aN\tau}[e^{-a\tau}-1]^n.$$

Pentru valorile n care verifică $0\leqslant n\leqslant N-k$, avem

$$p_n(t,\ k,\ \tau)=C_{N-k}^n e^{-a\,(N-k)\,(\tau-t)}[e^{-a\,(\tau-t)}-1]^n.$$

Vom însemna cu $p_n(t,\ \tau)$ probabilitatea ca în intervalul $(t,\ \tau)$ să se producă n dezagregări; atunci

$$p_n(t,\ \tau)=\sum_{k=0}^{N-n}p_k(0,\ 0,\ t)\cdot p_n(t,\ k,\ \tau).$$

Înlocuind probabilităţile p_k şi p_n cu valorile găsite, avem

$$p_n(t,\ \tau)=C_N^n[e^{-at}-e^{-a\tau}]\cdot[e^{-a\tau}+e^{-a\,(\tau-t)}-e^{-at}]^{N-n}.$$

Funcţia de repartiţie a procesului este

$$F(t,\ x;\ \tau,\ y)=\begin{cases}0, & \text{dacă}\quad y\leqslant x\\ \sum\limits_{n<y}p_n(t,\ x,\ \tau), & \text{dacă}\quad y<N-x\\ 1, & \text{dacă}\quad y\geqslant N-x.\end{cases}$$

27. O urnă U_1 conţine $m_1^{(1)}$ bile de culoarea 1, $m_2^{(1)}$ bile de culoarea 2, ..., $m_k^{(1)}$ bile de culoarea k. Se construieşte un şir de urne

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n,\ \ldots,$$

urna U_{n+1} fiind caracterizată prin numerele de bile

$$m_1^{(n+1)},\ m_2^{(n+1)},\ \ldots,\ m_k^{(n+1)},$$

determinate prin:

$$m_j^{(n+1)} = f_{lj}(m_1^{(n)}, \quad m_2^{(n)}, \ \ldots, \quad m_k^{(n)}),$$

unde funcțiile f_{lj} sînt omogene, de același grad și corespund fiecăreia dintre cele l culori din urnă.

Să se determine probabilitatea extragerii unei bile de culoare j din urna U_{n+1}.

Soluție. Notînd cu $p_j^{(n+1)}$ probabilitatea extragerii unei bile de culoarea j din urna U_{n+1}, avem

$$p_j^{(n+1)} = \frac{m_j^{(n+1)}}{\sum_{h=1}^{k} m_h^{(n+1)}} = \frac{f_{lj}(m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_k^{(n)})}{\sum_{h=1}^{k} f_{lh}(m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_k^{(n)})}.$$

Funcțiile f_{lj} fiind omogene, înlocuim $m_i^{(n)}$ prin $\dfrac{m_i^{(n)}}{\sum_{i=1}^{n} m_i^{(n)}}$ și obținem

$$p_j^{(n+1)} = \frac{f_{lj}(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)})}{\sum_{h=1}^{k} f_{lh}(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)})} = \varphi_{lj}(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)}).$$

Rezultă că lanțul construit mai sus este un lanț cu legături complete, simplu.

28. Fie dată matricea $\|p_{ij}\|$, $i=1, 2, \ldots, j=1, 2 \ldots$, cu proprietățile: $p_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$, și șirul de numere $(p_n)_n$ cu proprietățile: $p_n \geqslant 0$ și $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$; să se arate că există un spațiu de probabilități (Ω, F, P) și un lanț Markov staționar $(\xi_n)_n$, definit pe acest cîmp, cu mulțimea de stări $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ cu repartiția inițială $(p_i)_i$ și cu matricea probabilităților de trecere $\|p_{ij}\|$, $i=1, 2, \ldots, j=1, 2, \ldots$ [1])

Soluție. Ca spațiu Ω luăm mulțimea tuturor șirurilor $(x_n)_n$ de numere naturale. Pentru un număr întreg $m \geqslant 0$ și $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\}$ (i_k, numere naturale) să notăm cu $C(i_0, i_1, \ldots, i_m)$ mulțimea șirurilor $(x_n)_n$ pentru care $x_k = i_k$, $0 \leqslant k \leqslant m$. Mulțimile $C(i_0, i_1, \ldots, i_m)$ se numesc *mulțimi cilindrice.*

---

[1]) Vezi [30].

Corpul F este corpul generat de mulțimile cilindrice, adică este cel mai mic corp care conține mulțimile cilindrice.

Pe familia mulțimilor cilindrice definim funcția P astfel:

$$P(C(i_0, i_1, \ldots, i_m)) = p_{i_0} \prod_{k=1}^{m} p_{i_{k-1} i_k}.$$

Funcția de mulțime, P, definită pe mulțimile cilindrice o prelungim la F, cu ajutorul teoremei lui Kolmogorov relativă la măsurile produs, și formăm astfel spațiul de probabilități (Ω, F, P). Să definim șirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_n$ astfel: dacă $\omega \in \Omega$ este $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, atunci

$$\xi_n(\omega) = x_n.$$

Din modul cum s-a construit funcția P, avem

$$P(\xi_0(\omega) = i) = P(C(i)) = p_i; \tag{1}$$

și dacă $P(\xi_n(\omega) = i) > 0$, atunci

$$P(\xi_{n+1}(\omega) = j \mid \xi_n(\omega) = i) = \frac{P(\xi_n(\omega) = i,\ \xi_{n+1}(\omega) = j)}{P(\xi_n(\omega) = i)} =$$

$$= \frac{P\left\{ \bigcup_{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}} C(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j) \right\}}{P\left\{ \bigcup_{i_0, \ldots, i_{n-1}} C(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i) \right\}} =$$

$$= \frac{\sum_{i_0, \ldots, i_{n-1}} p_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\sum_{i_0, \ldots, i_{n-1}} p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i}} = p_{ij}. \tag{2}$$

Fie

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n;$$

avem, pentru probabilitățile condiționate,

$$P(\xi_{t_n}(\omega) = i_{t_n} \mid \xi_{t_k}(\omega) = i_{t_k};\ 1 \leqslant k \leqslant n-1) =$$

$$= \sum_{\substack{j_{t_k} = i_{t_k} \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \prod_{s=1}^{t_k} p_{j_{s-1} j_s} \Bigg/ \sum_{\substack{j_{t_k} = i_{t_k} \\ 1 \leqslant k \leqslant n-1}} \prod_{s=1}^{t_n = 1} p_{j_{s-1} j_s} = \sum_{\substack{j_{t_k} = i_{t_k} \\ k = n-1,\ n}} \prod_{s=t_{n-1}+1}^{t_n} p_{j_{s-1} j_s} =$$

$$= P\left\{ \xi_{t_n}(\omega) = i_{t_n} \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{t_{n-1}} \right\}, \tag{3}$$

deci, $(\xi_n)_n$ este un lanț Markov. Din relațiile (1) și (2) rezultă că lanțul Markov are repartiția inițială $(p_n)_n$ și matricea probabilităților de trecere $\|p_{ij}\|$, $i=1, 2, \ldots$; $j=1, 2, \ldots$

29. Să se arate că pentru orice matrice de trecere $\|p_{ij}\|$ și fiecare $h>0$, fix, suma

$$\sum_j |p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|$$

este nedescrescătoare cînd t crește. Dacă $\|p_{ij}\|$ este măsurabilă, atunci această sumă tinde uniform către zero pentru $t\geqslant\delta>0$, cînd $h\to 0$. În particular, fiecare p_{ij} este uniform continuă în (δ, ∞) pentru [1]) fiecare $\delta>0$.

Soluție. Avem, dacă $0<s<t$,

$$\sum_j |p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)| = \sum_j \Big|\sum_k [p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)]\, p_{ks}(t-s)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k |p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)| \sum_j p_{kj}(t-s) = \sum_k |p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)|.$$

Aceasta demonstrează prima afirmație. Mai departe, știm că matricea $\|p_{ij}\|$ este măsurabilă; integrînd, obținem, dacă $t\geqslant\delta>0$:

$$\sum_j |p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)| \leqslant \sum_k \frac{1}{\delta}\int_0^\delta |p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)|\,ds.$$

Dacă $0\leqslant h\leqslant\delta$ prima serie este majorată de

$$\sum_k \frac{2}{\delta}\int_0^{2\delta} p_{ik}(s)\,ds$$

și prin urmare converge uniform în $h\in[0, \delta]$ și $t\in[\delta, \infty)$. După o cunoscută teoremă a lui Tichmarsh avem, pentru fiecare k,

$$\lim_{h\to 0}\int_0^\delta |p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)|\,ds=0.$$

A doua afirmație rezultă din aceasta și din convergența uniformă.

A treia afirmație este imediată.

---

[1]) Vezi [30].

30. Fiind dat lanțul aleator $\{\xi_t\}$, $t=\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ în care variabilele aleatoare sînt independente și cu aceeași funcție de repartiție, să se arate că lanțul este staționar în sens larg (sau în sensul lui Hincin) [1].

Soluție. Un proces aleator se spune că este staționar în sens larg sau în sensul lui Hincin, dacă valorile medii $M\xi_t$ *sînt constante și corelațiile depind numai de diferențele* $t-s$,

$$M(\xi_t \bar{\xi}_s)=B(t-s).$$

Pentru fiecare t, variabila aleatoare ξ_t are funcția de repartiție $F(x)$:

$$P(\omega;\ \xi_t<x)=F(x),$$

deoarece toate variabilele au aceeași funcție de repartiție, și valoarea medie,

$$M\xi_t=\int x\,dF(x),$$

constantă. Putem presupune atunci că $M\xi_t=0$. Dispersia variabilei aleatoare ξ_t este

$$D^2\xi_t=M\xi_t^2-(M\xi_t)^2=M\xi_t^2$$

și se vede că nu depinde de t; putem presupune că $D\xi_t=1$. Funcția de corelație este

$$B(t,\ \tau)=M\xi_{t+\tau}\bar{\xi}_t$$

și cum variabilele lanțului sînt independente, rezultă că

$$B(t,\ \tau)=B(\tau)=\begin{cases}1, & \text{dacă } \tau=0\\ 0, & \text{dacă } \tau\neq 0;\end{cases}$$

deci lanțul este format cu variabile necorelate și formează un sistem ortogonal.

31. Fie $\{\xi_t\}$, $t=\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ un lanț de variabile aleatoare necorelate; să se arate că lanțul

$$\eta_t=\frac{\xi_t+\xi_{t-1}+\ldots+\xi_{t-m+1}}{\sqrt{m}},\quad t=\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

este staționar.

---

[1]) Vezi [28].

Soluție. Dacă presupunem că mediile sînt toate egale cu zero și dispersiile $D\xi_t$ egale cu 1, atunci se vede că $M\eta_t=0$. Funcția de corelație a lanțului este

$$B(t,\ \tau)=M\,\eta_{t+\tau}\,\overline{\eta}_t=M\,\frac{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\xi_{t-j+\tau}\,\overline{\xi}_{t-i}}{m}=B(\tau)$$

unde

$$B(\tau)=\begin{cases}\dfrac{m-\tau}{m}, & \text{dacă} \quad -m\leqslant\tau\leqslant m\\ 0, & \text{dacă} \quad |\tau|>m.\end{cases}$$

Observăm că valorile funcției $B(\tau)$ sînt cuprinse între 0 și 1 și sînt în progresie aritmetică.

32. Dacă punem

$$\eta_t=\sum_{j=0}^{m-1}a_j\xi_{t-j},\ t=\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

unde a_j sînt numere complexe și ξ_t formează un lanț staționar de variabile aleatoare necorelate, să se arate că η_t formează un lanț staționar.

Soluție. Se vede că $M\eta_t$ este constant, iar funcția de corelație este egală cu

$$B(\tau)=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{j-\tau\geqslant 0}^{m-1}a_j\overline{a}_{j-\tau}.$$

33. Dacă $\{\xi_t\}$, $t=\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ este un lanț staționar de variabile necorelate și $\{a_i\}$, $i=\ldots-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, un șir de numere complexe astfel ca $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|a_i|^2<+\infty$, atunci variabilele aleatoare

$$\eta_t=\sum_{-\infty}^{\infty}a_i\xi_{t-i}$$

formează un lanț staționar.

Soluție. Funcția de corelație, în acest caz, este

$$B(\tau)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i\cdot\overline{a}_{i-\tau}.$$

34. Fie ξ o variabilă aleatoare cu $M\xi = 0$ și $f(t)$ o funcție complexă, definită pentru $-\infty < t < +\infty$; să se determine funcția $f(t)$, astfel încît procesul

$$\xi_t = \xi \cdot f(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

să fie staționar în sensul lui Hincin[1]).

Soluție. Cum $M\xi = 0$, atunci pentru fiecare t fix,

$$M\xi_t = f(t) \cdot M\xi = 0.$$

Pentru funcția de corelație $B(t, \tau)$ avem

$$B(t, \tau) = M\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t = f(t+\tau) \cdot \overline{f(t)}\, M(|\xi|^2).$$

Pentru ca produsul să fie staționar trebuie ca

$$f(t+\tau) \cdot \overline{f(t)}$$

să nu depindă de t. Dacă $\tau = 0$, atunci trebuie ca

$$|f(t)|^2 = r = \text{const} \quad \text{și} \quad f(t) = re^{i\varphi(t)},$$

unde $\varphi(t)$ este funcție reală. Funcția de corelație se scrie

$$B(t, \tau) = r^2 e^{i(\varphi(t+\tau) - \varphi(t))} \cdot M(|\xi|^2)$$

și se vede că pentru staționaritate trebuie ca $\varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ să nu depindă de t. Să presupunem funcția φ derivabilă; atunci

$$\varphi'(t+\tau) = \varphi'(t) = \varphi'(0) = \text{const},$$

de unde rezultă

$$\varphi(t) = \lambda t + \mu$$

și deci

$$f(t) = re^{i(\lambda t + \mu)}.$$

Să notăm cu $\xi_0 = \xi r e^{i\mu}$; atunci ξ_0 este, de asemenea, variabilă aleatoare cu $M\xi_0 = 0$ și procesul se scrie sub forma

$$\xi_t = \xi_0 \cdot e^{i\lambda t};$$

funcția de corelație este

$$B(t, \tau) = B(\tau) = e^{i\lambda\tau} M(|\xi_0|^2).$$

---

[1]) Vezi [28].

35. Fie ξ_1 şi ξ_2 două variabile aleatoare necorelate, astfel încît $M\xi_1 = M\xi_2 = 0$; să se arate că procesul

$$\xi_t = \xi_1 e^{i\lambda_1 t} + \xi_2 e^{i\lambda_2 t}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad -\infty < t < +\infty,$$

este proces staţionar [1]).

Soluţie. Valoarea medie $M\xi_t = 0$, oricare ar fi t. Pentru funcţia de corelaţie avem:

$$B(t, \tau) = M\xi_{t+\tau}\bar{\xi}_t = M\{(\xi_1 e^{i\lambda_1(t+\tau)} + \xi_2 e^{i\lambda_2(t+\tau)})(\bar{\xi}_1 e^{-i\lambda_1 t} + \bar{\xi}_2 e^{-i\lambda_2 t})\} =$$

$$= M(|\xi_1|^2) e^{i\lambda_1\tau} + M(|\xi_2|^2) e^{i\lambda_2\tau} + M(\xi_1\bar{\xi}_2) e^{i(\lambda_1-\lambda_2)t+i\lambda_1\tau} +$$

$$+ M(\bar{\xi}_1\xi_2) e^{i(\lambda_2-\lambda_1)t+i\lambda_2\tau}.$$

Cum variabilele ξ_1 şi ξ_2 sînt necorelate, se vede că

$$B(t, \tau) = B(\tau),$$

deci procesul este staţionar, şi

$$B(\tau) = M(|\xi_1|^2) e^{i\lambda_1\tau} + M(|\xi_2|^2) e^{i\lambda_2\tau}.$$

36. *Semnalul telegrafic aleator.* [2]) Să considerăm procesul $\{\xi_t\}$, $-\infty < t < +\infty$, unde variabilele aleatoare ξ_t iau numai două valori 0 şi 1 cu probabilităţi egale, două variabile ξ_t, ξ_s fiind independente. Să se studieze funcţia de corelaţie a acestui proces.

Soluţie. Valoarea medie a procesului este

$$M\xi_t = 0 \cdot P(\xi_t = 0) + 1 \cdot P(\xi_t = 1) = \frac{1}{2}.$$

Să presupunem că în intervalul de timp de lungime T, probabilitatea ca procesul să aibă k salturi este dată de legea lui Poisson

$$P(k, T) = \frac{(aT)^k}{k!} e^{-aT},$$

unde a este numărul mediu al salturilor în intervalul unitate.

Funcţia de corelaţie $B(t, \tau) = M\xi_{t+\tau}\xi_t$ este egală cu

$$B(t, \tau) = 0 \cdot 0 \cdot P(\xi_{t+\tau} = 0, \xi_t = 0) + 0 \cdot 1 \cdot P(\xi_{t+\tau} = 0, \xi_t = 1) +$$

$$+ 1 \cdot 0 \cdot P(\xi_{t+\tau} = 1, \xi_t = 0) + 1 \cdot 1 \cdot P(\xi_{t+\tau} = 1, \xi_t = 1) =$$

$$= P(\xi_{t+\tau} = 1, \xi_t = 1).$$

---

[1]) Vezi [28].

[2]) Vezi [14].

Observăm că probabilitatea $P(\xi_{t+\tau}=1,\ \xi_t=1)$ este egală cu probabilitatea ca $\xi_t=1$ şi în intervalul de timp de la t la $t+\tau$ să avem un număr par de salturi ; deci

$$P(\xi_{t+\tau}=1,\ \xi_t=1)=P(\xi_t=1)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}P(2k,\ T).$$

Funcţia de corelaţie este egală cu

$$B(t,\ \tau)=\frac{1}{2}\,e^{-a\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a|\tau|)^{2k}}{(2k)!}$$

şi rezultă că procesul este staţionar în sensul lui Hincin.

Seria din membrul al doilea se poate scrie sub forma

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a|\tau|)^{2k}}{(2k)!}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a|\tau|)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a|\tau|)^{2k}}{(2k)!}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{a|\tau|}+e^{-a|\tau|}\right)$$

şi funcţia de corelaţie este atunci egală cu

$$B(\tau)=\frac{1}{4}(1+e^{-2a|\tau|}).$$

Se verifică imediat relaţiile

$$B(0)=M(\xi_t^2)=\frac{1}{2}\quad\text{şi}\quad B(\infty)=(M(\xi_t))^2=\frac{1}{4}\cdot$$

Graficul funcţiei de corelaţie este acela din fig. 17.

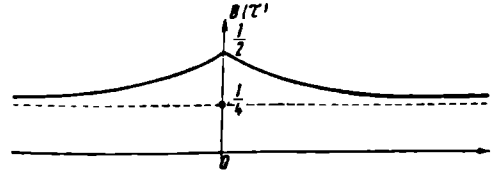

Fig. 17

37. Să se determine densitatea spectrală a semnalului telegrafic din exerciţiul precedent [1]).

Soluţie. Pentru un proces staţionar (ξ_t), se ştie că densitatea spectrală s se determină ca transformata Fourier a funcţiei de corelaţie $B(\tau)$:

$$s(f)=\int_{-\infty}^{\infty}B(\tau)\,e^{-2\pi i f\tau}d\tau.$$

[1]) Vezi [14].

În cazul semnalului telegrafic, am văzut că funcția de corelație este

$$B(\tau)=\frac{1}{4}(1+e^{-2a|\tau|});$$

densitatea spectrală este, atunci, egală cu

$$S(t)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}(1+e^{-2a|\tau|})\cdot e^{-2\pi it\tau}d\tau=\frac{1}{4}\delta(t)+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{0}^{\infty}e^{-2a\tau-2\pi it\tau}d\tau+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0}e^{2a\tau-2\pi it\tau}d\tau=\frac{1}{4}\left(\delta(t)+\frac{a}{a^2+\pi^2t^2}\right),$$

unde $\delta(t)$ este funcția delta a lui Dirac.

38. Fie ξ_t un proces aleator staționar în sensul lui Hincin, periodic cu perioada T. Dacă ξ_t se dezvoltă în serie Fourier,

$$\xi_t=\sum_{-\infty}^{\infty}x_n e^{in\frac{2\pi}{T}t},$$

atunci coeficienții Fourier

$$x_n=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\xi_t e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,dt$$

sînt variabile aleatoare necorelate [1]).

Soluție. Pentru fiecare t fix, ξ_t este o variabilă aleatoare, definită pe cîmpul de probabilitate $\{E, K, P\}$, care în general nu se scrie.

Să calculăm funcția de corelație a lanțului $\{x_n\}$, pentru $n\neq m$; avem

$$M(x_n\bar{x}_m)=\frac{1}{T^2}M\left(\int_0^T\int_0^T\xi_t\bar{\xi}_s e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\cdot e^{im\frac{2\pi}{T}s}\,dt\,ds\right)=$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B(t-s)\,e^{-in\frac{2\pi}{T}t+im\frac{2\pi}{T}s}\,dt\,ds,$$

unde $B(t-s)$ este funcția de corelație a procesului staționar ξ_t.

Funcția $B(\tau)$ fiind periodică, se poate dezvolta în serie Fourier:

$$B(\tau)=\sum_{-\infty}^{\infty}b_n e^{in\frac{2\pi}{T}\tau}$$

---

[1]) Vezi [14].

și $M(x_n \bar{x}_m)$ devine:

$$M(x_n \bar{x}_m) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\frac{2\pi}{T}(t-s)} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T}(ms-nt)} ds dt =$$

$$= \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(m-k)s} ds \cdot \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(k-n)} dt =$$

$$= \begin{cases} b_n, & \text{dacă } n \neq m \\ 0, & \text{dacă } n = m. \end{cases}$$

Rezultă de aici că $M(|x_n|^2) = b_n$, adică al n—lea coeficient din dezvoltarea Fourier a funcției de corelație $B(\tau)$, este egal cu dispersia coeficientului al n—lea din dezvoltarea Fourier a variabilei ξ_t.

39. Pentru procesul din exercițiul precedent, să se determine valoarea medie a energiei în perioada T și densitatea spectrală.

Soluție. Se numește *energia procesului*, în perioada T, expresia

$$\int_0^T |\xi_t|^2 dt.$$

Dacă energia este finită, atunci energia în perioada T este variabilă aleatoare, definită pe același cîmp $\{E, K, P\}$. Valoarea medie a energiei este

$$M\left(\int_0^T |\xi_t|^2 dt\right) = M\left\{\int_0^T \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{x}_k e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt\right\} =$$

$$= M\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \cdot T\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n.$$

Dacă luăm ca definiție a densității spectrale transformata Fourier a funcției de corelație, atunci se vede imediat că

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\frac{2\pi}{T}\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \cdot \delta\left(t - n\frac{2\pi}{T}\right),$$

unde $t=\frac{n}{T}$ şi δ este funcţia delta a lui Dirac. Se vede că

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T B(\tau)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,dt,$$

deoarece b_n sînt coeficienţii seriei Fourier pentru $B(\tau)$.

40. Un punct P se deplasează pe dreapta L cu viteza constantă v. Printr-un punct fix O, se duce o dreaptă spre punctul P. Să se determine viteza unghiulară $W(t)$ a acestei drepte şi densitatea spectrală a mărimii $W(t)$ [1]).

Soluţie. Să considerăm graficul din fig. 18, în care să notăm cu R distanţa de la O pînă la punctul P şi cu R_m distanţa cea mai mică dintre O şi P_m. Dacă măsurăm timpul din momentul în care punctul începe să se deplaseze de la P spre P_m, pentru viteza unghiulară a dreptei avem expresia:

$$W(t)=\frac{v\cdot\sin\theta}{R}=\frac{v\cdot R_m}{R^2}=\frac{v\cdot R_m}{R_m^2+v^2t^2}$$

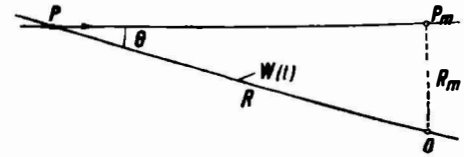

Fig. 18

Se vede că $W(t)$ este funcţie pară. Transformata Fourier a acestei funcţii este

$$a(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{vR_m}{R_m^2+v^2t^2}e^{-itx}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{vR_m}{R_m^2+v^2t^2}\cos tx\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{R_m}{v}|x|}.$$

Se ştie că densitatea spectrală este $E(x)=2\,|a(x)|^2$. Deci pentru un proces ξ_t

$$E(x)=\frac{1}{\pi}\left|\int\xi_t\,e^{-itx}\,dt\right|^2.$$

[1]) Vezi [14].

În cazul vitezei unghiulare,

$$E(x)=\pi e^{-\frac{R_m}{v}|x|}.$$

Să presupunem acum că R_m este variabilă aleatoare cu repartiție uniformă în intervalul $[0, R_m^0]$; atunci pentru densitatea spectrală a procesului aleator

$$\xi_t=\frac{vR_m}{R_m^2+v^2t^2},$$

obținem

$$\frac{1}{R_m^0}\int_0^{R_m^0}\pi e^{-\frac{2R_m}{v}|x|}\mathrm{d}R_m=\frac{\pi v}{2R_m^0 x}\left[1-e^{-\frac{2R_m^0}{v}|x|}\right].$$

CAPITOLUL VII

STATISTICĂ MATEMATICĂ (VALORI MEDII. DISPERSII. CORECȚII. MEDIANA. MODA. CORELAȚII. SELECȚII)

Problemele din acest capitol sînt aplicații practice ale principalelor metode de calcul folosite în Statistica matematică, metode care presupun cunoscute noțiunile folosite în capitolele anterioare.

In multe probleme au fost folosite date concrete luate din anuarele statistice ale Direcția Centrală de Statistică.

Pentru completări precum și pentru consultarea tabelelor de valori pentru repartițiile normală, Poisson și χ^2, cititorii sînt rugați să consulte „Lecții de Statistică matematică" de O. Onicescu și Gh. Mihoc, Editura Tehnică, 1958, precum și „Teoria probabilităților și Statistica matematică în tehnică" de V. Dunin-Barkovski și N. V. Smirnov, Editura I.R.S. Acad. R.P.R., 1959.

PROBLEME

1. Repartiția valorilor unei variabile observate este dată în tabela următoare, pe baza a 50 de observații.

Valorile mărimii	—1	0	1	2	3	4	5	6
Frecvențele	2	5	6	9	10	8	7	3

a) Să se calculeze valoarea medie a mărimii observate.
b) Să se calculeze dispersia și coeficientul de variabilitate.
c) Să se determine moda variabilei.

Soluție. Vom aranja calculele în tabela următoare:

n_i	Frecvențele cumulate	x_i	x_i-a	$n_i(x_i-a)$	$n_i(x_i-a)^2$
2	2	-1	-4	-8	32
5	7	0	-3	-15	45
6	13	1	-2	-12	24
9	22	2	-1	-9	9
10	32	$a=3$	0	0	0
8	40	4	1	8	8
7	47	5	2	14	28
3	50	6	3	9	27
50				-13	173

Pentru valoarea medie obținem:

$$\bar{x}=3-\frac{13}{50}=2{,}74.$$

b) Față de originea a, dispersia se calculează prin

$$\sigma^2=\frac{\sum_i n_i(x_i-a)^2}{n}-(\bar{x}-a)^2,$$

de unde rezultă:

$$\sigma^2=\frac{173}{50}-\frac{13^2}{50^2}$$

și $\sigma=1{,}84$.

Coeficientul de variabilitate $V=\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\times 100$ se exprimă în general în procente:

$$V=\frac{1{,}84}{2{,}74}\times 100=67\%.$$

c) Moda variabilei este 3, deoarece are frecvența 10.

Intr-un sistem de axe $x\ On$, graficul variabilei de mai înainte este acela din fig. 19.

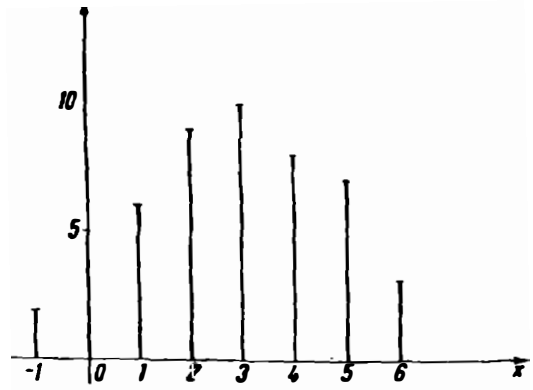

Fig. 19

Se observă că în intervalul $\bar{x} \pm 3\sigma$ sînt cuprinse toate valorile x_i.

Funcţia de repartiţie empirică este definită astfel:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 2/50 & -1 \leqslant x < 0 \\ 7/50 & 0 \leqslant x < 1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ 47/50 & 5 \leqslant x < 6 \\ 50/50 & 6 \leqslant x \end{cases}$$

Graficul funcţiei de repartiţie empirică este acela din fig. 20.

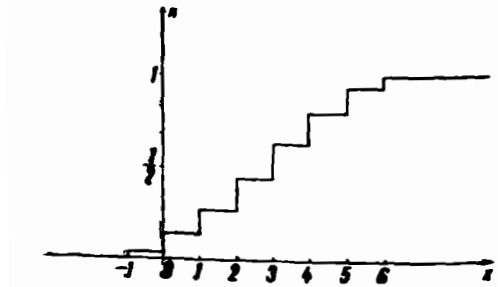

Fig. 20

2. Un grup de 100 de persoane se repartizează după înălțime astfel:

Înălțimea în cm	110—120	—130	—140	—150	—160	—170	—180	—190	—200
frecvența n	2	3	3	6	10	20	26	14	16

a) Să se calculeze înălțimea medie și dispersia.

b) Să se construiască graficul frecvențelor cumulate și să se determine grafic poziția medianei.

Soluție. Vom aranja calculele în tabela următoare

n	Frecvențe cumulate	Intervalele	Mijloacele intervalelor x	$\frac{x-a}{10}$	$\frac{n(x-a)}{10}$	$n\left(\frac{x-a}{10}\right)^2$
2	2	110—120	115	—4	—8	32
3	5	—130	125	—3	—9	27
3	8	—140	135	—2	—6	12
6	14	—150	145	—1	—6	6
10	24	—160	$a=155$	0	0	0
20	44	—170	165	1	20	20
26	70	—180	175	2	52	104
14	84	—190	185	3	42	126
19	100	—200	195	4	64	256
100					149	583

a) Pentru valoarea medie avem:

$$\bar{x}=155+10\times\frac{149}{100}=155+14{,}9=169{,}9.$$

Dispersia σ^2 este egală cu

$$\sigma^2=100\times\frac{583}{100}-(\bar{x}-a)^2+\frac{h^2}{12}=583-14{,}9^2+\frac{10^2}{12},$$

unde $h=10$, și deci

$$\sigma=19{,}47.$$

Termenul $\frac{h^2}{12}$ provine din corecția Sheppard.

b) Pentru o serie statistică, cu valori grupate pe intervale, funcţia de repartiţie se defineşte astfel:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < l_0 \\ \sum_{j=1}^{i-1} f_j + \frac{f_i}{d}(x - l_{i-1}), & l_{i-1} \leqslant x < l_i \\ 1, & l_n \leqslant x, \end{cases}$$

unde f_j sînt frecvenţele relative corespunzătoare mijlocului intervalului (l_{j-1}, l_j). Graficul frecvenţelor cumulate este acela din fig. 21.

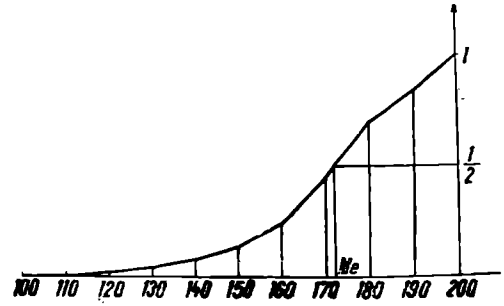

Fig. 21

3. Pentru determinarea sarcinii de rupere a unui fir de mătase naturală s-a făcut un sondaj, obţinîndu-se valorile $x_1, x_2, \ldots, x_N$ $(N=120)$, care au fost grupate în 12 clase. Datele obţinute sînt cele din tabela următoare:

Limitele claselor	Mediile claselor x_j	Frecvenţa f_m	Numărul clasei m	$m \cdot f_m$	$m^2 \cdot f_m$
50— 55	52,5	3,0	−6	−18,0	108,0
55— 60	57,5	1,5	−5	− 7,5	37,5
60— 65	62,5	9,0	−4	−36,0	144,0
65— 70	67,5	11,0	−3	−33,0	99,0
70— 75	72,5	18,5	−2	−37,0	74,0
75— 80	77,5	11,5	−1	−11,5	11,5
80— 85	82,5	23,5	0	0	0
85— 90	87,5	12,5	1	12,5	12,5
90— 95	92,5	14,5	2	29,0	58,0
95—100	97,5	7,0	3	21,0	63,0
100—105	102,5	5,5	4	22,0	88,0
105—110	107,5	2,5	5	12,5	62,5
Lăţimea clasei $c=5$		$N=120$		−46,0	758,0

4. Se cere să se calculeze:

a) Valoarea medie.

b) Abaterea medie pătratică.

c) Coeficientul de variație.

d) Să se afle intervalul de încredere corespunzător valorii medii cu o siguranță de $95^0/_0$.

e) Ce valoare trebuie să ia N pentru ca, la o siguranță de $95^0/_0$, să reducem domeniul de precizie la ± 1 gf?

Soluție. Vom calcula mai întîi coloanele mf_m și m^2f_m.

a) Se știe că

$$\bar{x}=\bar{x}'+\frac{c}{N}\cdot\sum_m m\cdot f_m,$$

unde $\bar{x}'$ este o valoare medie aproximativă (în cazul nostru $\bar{x}'=82{,}5$). Și deci

$$\bar{x}=82{,}5+\frac{5}{120}\sum_m mf_m=80{,}56.$$

b) Dispersia este dată de

$$s^2=\frac{c^2}{N-1}\left\{\sum_m m^2 f_m-\frac{1}{N}\left(\sum_m mf_m\right)^2\right\}$$

sau

$$s^2=155{,}54,$$

de unde

$$s=12{,}5.$$

Măsurarea sarcinii de rupere se caracterizează deci prin:

$$\bar{x}=80{,}6\text{ g},$$

$$s=12{,}5\text{ g}.$$

c) Coeficientul de variație este

$$V=\left(\frac{s}{\bar{x}}100\right)^0/_0=15{,}5^0/_0.$$

d) Intervalul de încredere al valorii medii este

$$\bar{x}\pm\lambda\frac{s}{\sqrt{N}}.$$

Pentru siguranța $s=95^0/_0$ din tabele rezultă că $\lambda=1{,}96$ și deci obținem

$$\bar{x}\pm\lambda\frac{s}{\sqrt{N}}=80{,}6\pm 2{,}24\text{ g}.$$

e) Pentru a reduce domeniul de precizie la ± 1 g cu o siguranţă de 95%, trebuie ca

$$\pm\lambda\frac{s}{\sqrt{N}}=\pm 1{,}96\frac{12{,}5}{\sqrt{N}}=\pm 1,$$

de unde rezultă că

$$N=600.$$

5. Un grup de 110 oameni se repartizează după vîrsta în ani astfel:

Vîrsta în ani	20—25	—30	—40	—50	—60	—80
Frecvenţa	15	18	25	30	12	10

a) Să se calculeze vîrsta medie.

b) Să se construiască graficul frecvenţelor cumulate şi să se determine mediana.

Soluţie. a) Repartiţia este dată pe intervale neegale. Folosind definiţia valorilor medii pentru o variabilă aleatoare simplă, avem

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\cdot\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)\cdot\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)\cdot n_i},$$

unde $a=20$, $b=80$, iar $\rho(x)$ este funcţia definită de tabela de mai înainte.

Avem

n_i	Intervalul x	$\frac{x_{i+1}-x_i}{5}$	$\frac{x_{i+1}+x_i}{2}$	$\frac{n_i(x_{i+1}-x_i)}{5}$	$n_i\cdot\frac{x_{i+1}-x_i}{5}\times\frac{x_{i+1}+x_i}{2}$	$n_i\frac{x_{i+1}-x_i}{5}\times\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)^2$
15	20—25	1	22,5	15	337,5	6 573,75
18	—30	1	27,5	18	495,0	13 612,50
25	—40	2	35,0	50	1750,0	61 250,00
30	—50	2	45,0	60	2700,0	121 500,00
12	—60	2	55,0	24	1320,0	72 600,00
10	—80	4	70,0	40	2800,0	196 000,00
				207	9402,5	471 536,25

Valoarea medie este

$$\bar{x}=\frac{9402{,}5}{207}=45{,}42.$$

Calculul dispersiei se face cu ajutorul momentului de ordinul al doilea

$$\sigma^2+\bar{x}^2=\frac{\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} x^2\rho(x)\,dx}{\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x)\,dx}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_{i+1}-x_i)\cdot\frac{x_{i+1}^2+x_{i+1}x_i+x_i^2}{3}}{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_{i+1}-x_i)}$$

sau încă

$$\sigma^2+\bar{x}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_{i+1}-x_i)\cdot\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_{i+1}-x_i)}+\frac{1}{12}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_{i+1}-x_i)^3}{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_{i+1}-x_i)};$$

făcînd calculele, se obține:

$$\sigma^2=226{,}98 \quad \text{şi} \quad \sigma=15{,}05.$$

b) Graficul frecvențelor cumulate este acela din fig. 22.

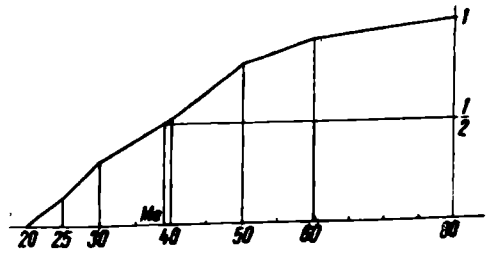

Fig. 22

6. O populație de 1000 indivizi este împărțită în trei părți A, B, C. Pe fiecare parte caracteristica x are repartiția dată în tabela următoare:

	A											B													C										
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
n	25	30	15	40	44	16	14	10	9	5		50	55	60	70	75	80	85	60	40	20	15	10	5	30	25	30	55	40	30	25	15	10	5	
Total	$N_A=210$											$N_B=625$													$N_C=265$										

a) Să se determine mediile aritmetice şi dispersiile grupelor A, B, C.

b) Să se determine media aritmetică şi dispersia întregii populaţii.

Soluţie. a) Vom nota cu $\bar{x}_A$, $\bar{x}_B$, $\bar{x}_C$ mediile aritmetice pentru fiecare grupă şi cu σ_A, σ_B, σ_C dispersiile corespunzătoare. Făcînd calculele, obţinem:

$$\bar{x}_A=5{,}347, \quad \bar{x}_B=6{,}540, \quad \bar{x}_C=6{,}547$$

şi pentru dispersii

$$\sigma_A^2=5{,}63, \quad \sigma_B^2=7{,}75, \quad \sigma_C^2=5{,}18.$$

b) Pentru calculul mediei populaţiei întregi, ţinem seama de formula de adunare a mediilor aritmetice

$$\bar{x}=\frac{N_A\cdot\bar{x}_A+N_B\cdot\bar{x}_B+N_C\cdot\bar{x}_C}{N_A+N_B+N_C}.$$

Făcînd calculele, obţinem

$$\bar{x}=6{,}312.$$

Pentru calculul dispersiei generale ţinem seamă de relaţia

$$\sigma^2=\frac{N_A\sigma_A^2+N_B\sigma_B^2+N_C\sigma_C^2}{N_A+N_B+N_C}=\frac{(\bar{x}_A-\bar{x})^2N_A+(\bar{x}_B-\bar{x})^2N_B+(\bar{x}_C-\bar{x})^2N_C}{N_A+N_B+N_C}.$$

	N	$\bar{x}_k$	σ_k^2	$(\bar{x}_k-\bar{x})^2$	$\sigma_k^2 N_k$	$(\bar{x}_k-\bar{x})^2 N_k$
A	210	5,347	5,63	0,932	1182,30	195,720
B	625	6,540	7,75	0,052	4843,75	32,500
C	265	6,547	5,18	0,055	1362,70	14,575
	1100				7388,75	242,795

$$\sigma^2\approx 6{,}94,$$

de unde

$$\sigma\approx 2{,}63.$$

7. Dintr-un fir de bumbac s-au făcut, depănînd de fiecare dată cîte 100 m, 75 determinări ale numărului metric[1]) şi anume cîte 15 măsurători, pe 5 ţevi diferite.

[1]) Numărul metric al unui fir de bumbac reprezintă grosimea firului.

Să se cerceteze dacă dispersia numărului metric în cuprinsul țevilor separate este de același ordin de mărime ca cea dintre țevi.

Datele obținute sînt următoarele:

Teava no.	Valoarea medie	Abaterea medie pătratică	Dispersia
1	$\bar{x}_1 = 18{,}1$	$s_1 = 0{,}551$	$s_1^2 = 0{,}305$
2	$\bar{x}_2 = 19{,}3$	$s_2 = 0{,}558$	$s_2^2 = 0{,}310$
3	$\bar{x}_3 = 18{,}5$	$s_3 = 0{,}498$	$s_3^2 = 0{,}248$
4	$\bar{x}_4 = 19{,}2$	$s_4 = 0{,}604$	$s_4^2 = 0{,}367$
5	$\bar{x}_5 = 18{,}9$	$s_5 = 0{,}365$	$s_5^2 = 0{,}133$

Soluție. Avem:

$$\sum_n \bar{x}_n = 94, \qquad \bar{\bar{x}} = \frac{94}{5} = 18{,}8, \qquad \sum_n s_n^2 = 1{,}363$$

și

$$\bar{s}_1^2 = 3{,}75,$$

$$\bar{s}_2^2 = 0{,}273.$$

Numărul gradelor de libertate între țevi este $n_1 = k - 1 = 4$, iar în interiorul țevii, $n_2 = 5(15-1) = 70$.

Raportul

$$\frac{\bar{s}_1^2}{\bar{s}_2^2} = 13{,}7.$$

Din tabelele de valori F pentru $n_1 = 4$ și $n_2 = 70$, obținem $F = 3{,}65$ și deci dispersia dintre țevi este cu siguranță mai mare decît cea din interiorul unei singure țevi. Sîntem în cazul unor erori sistematice și deci tehnicianul are rolul de a descoperi proveniența acestora.

8. Repartiția a 1000 soldați după circumferința toracică, măsurată în degete (1 deget $= 2\,^1/_2$ cm) este

x	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
n_x	1	3	11	36	67	119	160	204	166	119	68	28	13	4	1
n'_x	1	3	12	32	69	121	169	189	168	120	69	31	11	3	1

n_x sînt frecvenţele observate, iar n'_x sînt frecvenţele calculate cu ajutorul curbei normale (exemplul lui *Ketle*).

Folosind criteriul χ^2, să se stabilească dacă diferenţele dintre frecvenţe sînt sau nu întîmplătoare.

Soluţie. Deoarece în comparaţie cu celelalte frecvenţe primele trei şi ultimele trei sînt mici, le vom grupa la un loc.

n_x	n'_x	$n_x - n'_x$	$\frac{(n_x-n'_x)^2}{n'_x}$
15	16	− 1	0,0625
36	32	4	0,5000
67	69	− 2	0,0580
119	121	− 2	0,0331
160	169	− 9	0,4793
204	189	15	1,1905
166	168	− 2	0,0238
119	120	− 1	0,0083
68	69	− 1	0,0145
28	31	− 3	0,2903
18	15	3	0,6000
			3,2603

Cum $\sum n_x = 100$ şi legea normală este o lege cu doi parametri, rezultă că χ^2 are $k = 11-3 = 8$ grade de libertate. Căutînd în tabela valorilor lui χ^2, găsim că pentru $k=8$

$$0{,}90 < P_8(3{,}26) < 0{,}95,$$

deci putem considera cu probabilitate destul de mare că abaterile sînt întîmplătoare.

9. La populaţia probabilă a R.P.R. la 1 iulie (în mii de locuitori), numărul născuţilor vii este dat în tabela următoare:

Anii	Populația în mil locuitori n_i	Născuți vii la 1000	Născuți vii m_i
1946	15 791	24,8	391,6
47	15 849	23,4	371,0
48	15 893	23,9	379,8
49	16 084	27,6	443,9
50	16 311	26,2	427,3
51	16 464	25,1	413,2
52	16 630	24,8	412,4
53	16 847	23,8	401,0
54	17 040	24,8	422,6
55	17 325	25,6	433,5
56	17 579	24,2	425,4
	181 813		4521,7

Calculînd probabilitatea p a unui născut viu și frecvențele $m_i'=n_i \cdot p$, să se aplice criteriul lui χ^2 pentru m_i, m_i' și să se constate dacă abaterile pot fi considerate ca întîmplătoare.

Soluție. Pentru determinarea probabilității p, avem

$$p=\frac{\sum m_i}{\sum n_i}=0{,}02487=0{,}025.$$

Calculele le aranjăm în tabela următoare:

Anii	Populația în mil	m_i	m_i'	m_i-m_i'	$\frac{(m_i-m_i')^2}{m_i}$
1946	15 791	391,6	394,8	− 3,2	0,026
47	15 849	371,0	396,3	−25,3	1,615
48	15 893	379,8	399,8	−20,0	1,000
49	16 084	443,9	402,1	41,8	4,345
50	16 311	427,3	407,8	19,5	0,932
51	16 464	413,2	411,6	1,6	0,006
52	16 630	412,4	415,6	− 3,2	0,024
53	16 847	401,0	421,2	−20,2	0,968
54	17 040	422,6	426,0	− 3,4	0,027
55	17 325	433,5	443,1	− 9,6	0,207
56	17 579	425,4	437,0	−11,6	0,307
	181 813	4521,7			9,457

Rezultă că

$$\chi^2=9{,}457,$$

iar gradele de libertate ale legii sînt egale cu

$$k=11-1=10,$$

deoarece m_l se supune unei singure condiții. In tabele găsim, pentru $k=10$,

$$0{,}30 < P_{10}(\chi) < 0{,}50.$$

10. In cadrul a patru laboratoare diferite de control s-au făcut cîte $l=10$ măsurători, adică $N=k\cdot l=40$ măsurători, asupra unui anumit reper, rezultatele fiind următoarele:

Laboratorul	Valoarea medie	Valoarea medie pătratică	Dispersia
1	$\bar{x}_1=151$	$s_1=22{,}9$	$s_1^2=526$
2	$\bar{x}_2=148$	$s_2=24{,}1$	$s_2^2=583$
3	$\bar{x}_3=168$	$s_3=24{,}5$	$s_3^2=601$
4	$\bar{x}_4=173$	$s_4=22{,}6$	$s_4^2=511$

Să se cerceteze dacă diferențele dintre valorile medii date de fiecare laborator sînt sistematice sau întîmplătoare, aplicînd criteriul F.

Soluție. Sîntem în cazul unei probleme de dispersie simplă. Să calculăm mai întîi următoarele caracteristici:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \bar{x}_\mu = 640, \quad \bar{\bar{x}} = \frac{640}{4} = 160, \quad \sum_{\mu=1}^{4} s_\mu^2 = 2221,$$

$$\bar{s}_1^2 = \frac{l}{k-s} \sum_{\mu=1}^{k} (x_\mu - \bar{\bar{x}})^2$$

sau

$$\bar{s}_1^2 = 1527,$$

iar

$$\bar{s}_2^2 = \frac{1}{k} \sum_{\mu=1}^{k} s_\mu^2 = 555.$$

Raportul care trebuie verificat prin proba după F este

$$\frac{\bar{s}_1^2}{\bar{s}_2^2} = 2{,}75.$$

In tabelă se găseşte pentru $n_1=k-1=3$ şi $n_2=N-k=36$ o valoare (n_1 şi n_2 sînt gradele de libertate corespunzătoare)

$$F>2{,}84.$$

Deci valoarea $2{,}75<2{,}84$ şi deci diferenţele dintre valorile medii ale fiecărui laborator sînt întîmplătoare.

11. Fie dată variabila empirică x observată pe 1000 de cazuri

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,4
n_x	625	200	106	47	15	5	1

Să se construiască graficul distribuţiei şi să se compare cu distribuţia normală (0, 1), cu ajutorul criteriului lui Kolmogorov.

Soluţie. Cu ajutorul tabelei valorilor funcţiei de repartiţie normală formăm tabela următoare:

x	$\frac{n_x}{n}$	Frecvenţele cumulate $F_n(x)$	$F(x)$	$\lvert F(x)-F_n(x)\rvert$
0,5	0,625	0,625	0,691	0,066
1,0	0,200	0,825	0,841	0,016
1,5	0,106	0,931	0,933	0,002
2,0	0,047	0,978	0,977	0,001
2,5	0,016	0,994	0,993	0,001
3,0	0,005	0,999	0,998	0,001
3,4	0,001	1,000	0,999	0,001

Rezultă de aici că

$$D=\sup|F(x)-F_n(x)|=0{,}066$$

şi deci

$$\lambda=D\sqrt{1000}=0{,}066\sqrt{1000};\quad \lambda=2{,}05.$$

Din tabela valorilor funcţiei $K(x)$ găsim

$$K(2{,}05)=0{,}999562$$

şi

$$1-K(2{,}05)=P(\sqrt{n}\cdot D_n\geqslant 2{,}05)=\frac{438}{10^6},$$

prin urmare cu o probabilitate mai mare decît 1 la 2500 putem afirma că abaterile sînt esenţiale.

12. Fie dată repartiția unei populații după caracteristica x:

x	n
0,70	0,001
0,75	0,015
0,80	0,060
0,85	0,120
0,90	0,221
0,95	0,341
1,00	0,399
1,05	0,352
1,10	0,217
1,15	0,129
1,20	0,054
1,25	0,017
1,30	0,004
	1,930

a) Să se calculeze valoarea medie și dispersia.
b) Să se ajusteze după repartiția normală.

Soluție. a) Pentru calculul valorii medii și a dispersiei facem următoarea tabelă:

x	n	$(x-1)\,100=y$	y_n	y_n^2
0,70	0,001	−30	−0,030	0,900
0,75	0,015	−25	−0,375	9,375
0,80	0,060	−20	−0,120	2,400
0,85	0,120	−15	−1,800	2,700
0,90	0,221	−10	−2,210	22,100
0,95	0,341	− 5	−1,705	8,325
1,00	0,399	0	0,000	0,000
1,05	0,352	5	1,660	8,300
1,10	0,217	10	2,170	21,700
1,15	0,129	15	1,935	29,025
1,20	0,054	20	1,080	21,600
1,25	0,017	25	0,425	10,625
1,30	0,004	30	0,120.	3,600
	1,930		1,150	40,650

$y=0{,}5958$

$\sigma_y^2=2{,}1062$

Ținînd seama de proprietățile mediei aritmetice și notînd cu $\bar{y}$ valoarea medie a variabilei y, avem

$$\bar{x}=\frac{\bar{y}}{100}+1.$$

Cum $\bar{y}=0{,}5958$, rezultă

$$\bar{x}=1{,}005958\approx 1{,}006.$$

Notînd cu σ_y şi σ_x dispersiile, avem

$$\sigma_x^2=\frac{\sigma_y^2}{100^2},$$

de unde pentru $\sigma_y^2=2{,}1062$, rezultă

$$\sigma_x^2=\frac{2{,}1062}{100^2} \quad \text{şi} \quad \sigma_x=\frac{1{,}45}{100}=0{,}0145.$$

b) Pentru ajustarea distribuţiei după curba normală, aranjăm calculele în tabela următoare, formînd variabila redusă

$$X=\frac{x-\bar{x}}{\sigma};\quad \frac{N}{\sigma}=13{,}3103;\quad \frac{N}{\sigma}\cdot d=0{,}6655$$

x	$x-\bar{x}$	$\frac{x-\bar{x}}{\sigma}=X$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=z$	$n'=\frac{N}{\sigma}\cdot d\cdot z$
0,70	−0,306	−2,110	0,0000	0,000
0,75	−0,256	−1,765	0,0031	0,002
0,80	−0,206	−1,420	0,0519	0,034
0,85	−0,156	−1,075	0,2036	0,135
0,90	−0,106	−0,731	0,3467	0,230
0,95	−0,056	−0,386	0,3945	0,263
1,00	−0,006	−0,041	0,3989	0,265
1,05	0,044	0,303	0,3973	0,264
1,10	0,094	0,648	0,3653	0,243
1,15	0,144	1,000	0,2420	0,161
1,20	0,194	1,337	0,0804	0,053
1,25	0,244	1,683	0,0073	0,005
1,30	0,294	2,027	0,0000	0,000

13. Fie dată distribuţia pe segmentul [0,6].

x	—0	0—1	—2	—3	—4	—5	—6	6—
n	0	1,00	1,50	2,00	1,75	1,60	1,40	0

a) Să se ajusteze distribuţia dată după o dreaptă, cu metoda celor mai mici pătrate, considerînd mijloacele intervalelor.

b) Să se calculeze media aritmetică şi dispersia repartiţiei ajustate şi să se compare cu $\bar{x}$ şi σ^2.

Soluție. a) Vom considera ecuația dreptei

$$y=ax+b \quad \text{pentru} \quad 0\leqslant x\leqslant 6.$$

Dacă x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sînt abscisele mijloacelor intervalelor și $y_i=n_i$ frecvențele corespunzătoare, vom cere ca

$$F(a,\ b)=\sum_{i=1}^{6}(y_i-ax_i-b)^2$$

să fie minimă.

Această condiție ne conduce la sistemul de ecuații

$$a\sum_{i=1}^{6}x_i+6b=\sum_{i=1}^{6}y_i$$

și

$$a\sum_{i=1}^{6}x_i^2+b\sum_{i=1}^{6}x_i=\sum_{i=1}^{6}x_iy_i\,.$$

Pentru formarea celor două ecuații aranjăm calculele în tabela următoare:

x	n (y_i)	Mijloacele intervalelor x_i	x_i^2	x_iy_i	$x_i^2y_i$
−0	0,00	−0	0	0,000	0,000
0−1	1,00	0,5	0,25	0,500	0,250
1−2	1,50	1,5	2,25	2,250	3,375
2−3	2,00	2,5	6,25	5,000	12,550
3−4	1,75	3,5	12,25	6,125	21,437
4−5	1,60	4,5	20,25	7,200	32,400
5−6	1,40	5,5	30,25	7,700	42,350
6−	0,00	—	0	0,000	0,000
	9,25	18,0	71,50	28,775	112,362

Sistemul de ecuații este

$$18a+6b=9{,}25,$$

$$71{,}5a+18b=28{,}775,$$

de unde

$$a=\frac{0{,}41}{7},\quad b=\frac{57{,}37}{42};$$

obținem dreapta

$$y=\frac{0{,}41}{7}x+\frac{57{,}35}{42};\quad y=0{,}0585\,x+1{,}365,$$

(fig. 23).

b) Valoarea medie a distribuției date este

$$\bar{x}=\frac{28{,}775}{9{,}25}=3{,}111,$$

iar dispersia este

$$\sigma^2=\frac{112{,}312}{9{,}25}=12{,}142-3{,}111^2=2{,}464.$$

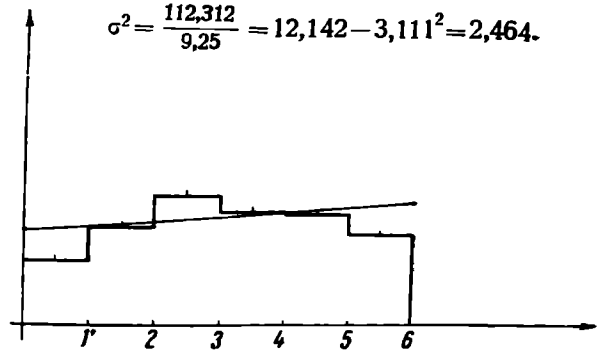

Fig. 23.

Pentru distribuția teoretică $y=ax+b$, valoarea medie pe intervalul [0,6] este

$$\tilde{x}=-\int_0^6 \frac{x\,(ax+b)\,dx}{\int_0^6 (ax+b)\,dx}=\frac{72a+18b}{18a+6b}=\frac{12a+3b}{3a+b}$$

sau

$$\tilde{x}=\frac{4{,}797}{1{,}540}\approx 3{,}114.$$

Dispersia este

$$\sigma^2=\frac{\int_0^6 x^2\,(ax+b)\,dx}{\int_0^6 (ax+b)\,dx}-x^2=\frac{54a+12b}{3a+b}-x^2$$

făcînd calculele, obținem

$$\sigma^2=12{,}667-9{,}696=2{,}991.$$

14. Se dă distribuția:

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2	2,5	3,0	3,5	4,0
n_x	0,01	0,10	0,20	0,30	0,50	0,35	0,25	0,07	0,02

a) Să se ajusteze repartiția cu ajutorul unei parabole folosind metoda celor mai mici pătrate.

b) Să se ajusteze repartiția cu ajutorul unei repartiții de tip Simpson.

Soluție. Vom presupune ecuația parabolei de forma

$$n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

și vom nota cu n_i valoarea funcției în punctul x_i. Determinăm coeficienții a_0, a_1, a_2 astfel, încît

$$S(a_0,\ a_1,\ a_2)=\sum_{i=1}^{9}(n_{xi}-a_0-a_1x_i-a_2x_i^2)^2$$

să fie minimă. Sistemul de ecuații care determină coeficienții a_0, a_1, a_2 se obțin anulînd derivatele parțiale, respectiv în raport cu a_0, a_1 și a_2. Avem:

$$\sum_{i=1}^{9}n_{x_i}=9a_0+a_1\sum_{i=1}^{9}x_i+a_2\sum_{i=1}^{9}x_i^2,$$

$$\sum_{i=1}^{9}n_{x_i}x_i=a_0\sum_{i=1}^{n}x_i+a_1\sum_{i=1}^{9}x_i^2+a_2\sum_{i=1}^{9}x_i^3,$$

$$\sum_{i=1}^{9}n_{x_i}x_i^2=a_0\sum_{i=1}^{9}x_i^2+a_1\sum_{i=1}^{9}x_i^3+a_3\sum_{i=1}^{9}x_i^4.$$

Aranjăm calculul coeficienților în tabela următoare

x_i	n_{x_i}	$x_in_{x_i}$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2n_{x_i}$
0,0	0,01	0,000	0,00	0,000	0,0000	0,0000
0,5	0,10	0,050	0,25	0,125	0,0625	0,0250
1,0	0,20	0,200	1,00	1,000	1,0000	0,2000
1,5	0,30	0,450	2,25	3,375	5,0625	0,6750
2,0	0,50	1,000	4,00	8,000	16,0000	2,0000
2,5	0,35	0,875	6,25	15,625	39,0625	2,1875
3,0	0,25	0,750	9,00	27,000	81,0000	2,2500
3,5	0,07	0,245	12,25	42,875	150,0625	0,8575
4,0	0,02	0,080	16,00	64,000	256,0000	0,3200
18,0	1,80	3,650	51,00	162,000	548,2500	8,5150

Sistemul de ecuații devine

$$\begin{aligned}9a_0+18a_1\ &+51a_2\ &=1,80,\\ 18a_0+51a_1\ &+162a_2\ &=3,65,\\ 51a_0+162a_1\ &+548,25\ &=8,515\end{aligned}$$

şi are soluţiile:

$$a_0=0{,}035,\quad a_1=0{,}3949,\quad a_2=0{,}0979.$$

Ecuaţia parabolei este

$$n(x)=-0{,}035+0{,}3949x-0{,}0979x^2.$$

Comparaţia dintre frecvenţele observate şi cele ajustate se poate face pe tabela următoare:

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
n_x	0,01	0,10	0,20	0,30	0,50	0,35	0,25	0,07	0,02
$n(x)$	−0,035	0,138	0,2620	0,337	0,3632	0,330	0,2686	0,147	−0,02

Vom împărţi repartiţia în două părţi disjuncte: una de la 0 pînă la 2 inclusiv şi alta de la 2,5 pînă la 4; vom ajusta fiecare dintre aceste repartiţii parţiale cu drepte (vezi fig. 24).

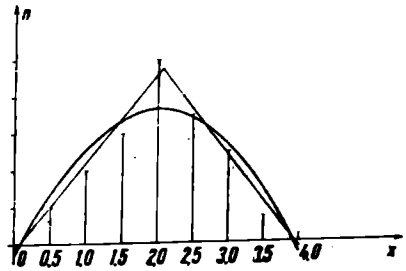

Fig. 24.

Pentru prima parte avem $n_1=ax+b$.

x	n_x	$n_{x_i}x_i$	x_i^2	Frecvenţe ajustate
0,0	0,01	0,00	0,00	−0,014
0,5	0,10	0,05	0,25	0,104
1,0	0,20	0,20	1,00	0,222
1,5	0,30	0,45	2,25	0,340
2,0	0,50	1,00	4,00	0,458
5,0	1,11	1,70	7,50	

Obținem sistemul

$$5a+5b=1{,}11,$$

$$7{,}5a+5b=1{,}70,$$

de unde $a=0{,}236$, $b=-0{,}014$ și $n_1=0{,}236x-0{,}014$.

Pentru partea a doua a repartiției avem

x	n_x	$n_i x_i$	x_i^2	Frecvențe ajustate
2,5	0,35	0,875	6,25	0,348
3,0	0,25	0,750	9,00	0,231
3,5	0,07	0,245	12,25	0,114
4,0	0,02	0,080	16,00	−0,003
13,0	0,69	1,950	43,50	

Sistemul de ecuații care determină coeficienții dreptei $n_2=ax+b$ este

$$13a+4b=0{,}69,$$

$$43{,}5a+13b=1{,}95,$$

de unde

$$a=-0{,}234, \quad b=0{,}933 \quad \text{și} \quad n_2=-0{,}234x+0{,}933.$$

15. Repartiția cantității anuale de precipitații pe perioada 1945—1954 în R.P.R. este

Anii	1945	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Cantitatea anuală în mm/m²	445,1	479,1	561,5	472,3	584,3	532,8	583,0	662,3	543,8	713,1

a) Să se construiască graficul repartiției și folosind metoda trapezului să se determine cantitatea medie de precipitații pe cei zece ani.

b) Să se afle media geometrică a coeficientului de creștere de la un an la altul.

Soluție. a) Reprezentînd pe abscise anii și pe ordonată cantitățile de precipitații se obține graficul din fig. 25.

In metoda trapezelor înlocuim un trapez printr-un dreptunghi de aceeaşi bază dar cu înălţimea medie aritmetică a celor două ordonate $\frac{y_i+y_{i+1}}{2}$.

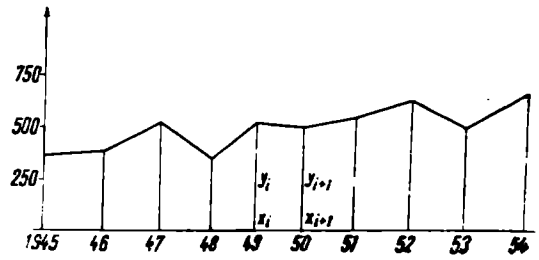

Fig. 25.

Insemnînd cu $\bar{x}$ media, vom obţine, ţinînd seamă că

$$x_{i+1}-x_i=1$$

şi că lungimea de la 1945 pînă la 1954 este egală cu 9,

$$\bar{x}=\frac{\frac{x_1}{2}+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+\frac{x_{10}}{2}}{9}.$$

Inlocuind, avem

$$\bar{x}=\frac{6636}{18}=\frac{1106}{3}=368{,}66.$$

b) Coeficienţii de creştere de la un an la altul sînt:

$$\frac{479{,}1}{445{,}1};\ \frac{561{,}5}{479{,}1};\ \ldots;\ \frac{713{,}1}{543{,}8}.$$

Media geometrică $\bar{x}_g$ este egală cu

$$\bar{x}_g=\sqrt[9]{\frac{713{,}1}{445{,}1}}$$

şi reprezintă un coeficient mediu de creştere pentru cei 10 ani.

16. Fie dată repartiţia discretă următoare:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	0,136	0,270	0,270	0,180	0,100	0,030	0,010	0,003	0,001	0,000

a) Să se ajusteze repartiția cu ajutorul repartiției Poisson

$$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

b) Să se ajusteze repartiția cu ajutorul repartiției binomiale

$$P_{100;\,k}, \quad p = \frac{\lambda}{100}.$$

c) Să se compare cele două ajustări, cu repartiția dată.

Soluție. a) Media aritmetică a repartiției este

$$\bar{x} = 1{,}989 \approx 2 = \lambda;$$

atunci recurgem la o repartiție Poisson cu media 2, dată de tabela de valori ale funcției $P_k(a) = \frac{a^k e^{-k}}{k!}$ [1])

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	0,13534	0,27067	0,27067	0,18045	0,09022	0,03608	0,01203	0,00343	0,0008	0,00019

b) Pentru calculul probabilităților $P_{100;\,k}$ folosim formula

$$P_{100;\,k} = C_{100}^k p^k q^{100-k},$$

unde $p = \frac{2}{100}$ și $q = \frac{98}{100}$.

Pentru $k=0$, probabilitatea corespunzătoare este

$$P_{100;\,0} = \left(\frac{98}{100}\right)^{100} = 0{,}13180;$$

celelalte probabilități se calculează cu ajutorul relației de recurență

$$P_{100;\,k+1} = \frac{100-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot P_{100;\,k}.$$

Rezultatele sînt date de tabela următoare:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n'	0,13180	0,13315	0,08876	0,04392	0,01721	0,00556	0,00152	0,00033	0,00007	0,00001

[1]) Vezi [21].

c) Funcțiile de repartiție empirice, corespunzătoare celor trei repartiții, sînt date mai departe:

$x<0$		0	1	2	3	4
Repartiția dată F_n	0	0,136	0,406	0,676	0,856	0,956
Repartiția Poisson F'_n	0	0,13534	0,40601	0,67668	0,85713	0,94735
Repartiția binomială F''_n	0	0,13180	0,26495	0,35371	0,39763	0,41484

(continuare

5	6	7	8	9	$9<x$
0,986	0,996	0,999	1,000	1,000	1
0,98343	0,99546	0,99889	0,99969	0,99988	1
0,42040	0,42192	0,42225	0,42232	0,42233	1

Pentru primele două repartiții

$$\sup_x |F_n(x)-F'_n(x)| = 0{,}01065,$$

iar pentru repartiția binomială F''_n, avem

$$\sup_x |F_n(x)-F''_n(x)| = 0{,}57768.$$

Prin urmare, repartiția Poisson ajustează mai bine repartiția dată.

17. Cînd se fac citiri pe scala unui aparat de măsurat, ultimele cifre ale indicaţiilor sînt în general estimate aproximativ. Se constată o predilecţie pe care o manifestă observatorii experimentaţi faţă de anumite cifre. In tabela care urmează este dată repartiţia a două sute de estimaţii a ultimei cifre, pe care le face un observator citind pe scala unui aparat de măsurat [1]).

Cifrele	Frecvenţa cifrei observate f_i	Valorile medii ale frecvenţelor np_i	Abaterile $f_i - np_i$	$\frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$
0	35	20	15	11,25
1	16	20	− 4	0,80
2	15	20	− 5	1,25
3	17	20	+ 3	0,45
4	17	20	− 3	0,45
5	19	20	− 1	0,05
6	11	20	− 9	4,05
7	16	20	− 4	0,80
8	30	20	10	5,00
9	24	20	4	0,80
	200	200	6	24,90

Să se arate dacă erorile sînt sistematice sau nu.

Soluţie. Se vede că cifrele 0 şi 8 au frecvenţă mai mare decît celelalte. Vom compara repartiţia observată cu repartiţia uniformă în care probabilitatea de citire a unei cifre oarecare este 1/10.

Comparaţia celor două repartiţii se face cu ajutorul criteriului χ^2.

Citind în tabela valorilor pentru χ^2 (vezi [6] tabela VIII), găsim că valoarea lui χ^2, corespunzătoare la 9 grade de libertate şi pragului de semnificaţie de 0,5%, este 23,6; iar aceea corespunzătoare la 9 grade de libertate şi pragului de semnificaţie de 0,2% este 26,1; cum valoarea obţinută din observaţii, a lui χ^2 este 24,90, ipoteza că erorile n-ar fi sistematice trebuie înlăturată.

18. Repartiţia a 320 inele semifabricate pentru rulmenţii cu bile, după înălţime şi după diametrul exterior, este: [2])

[1]) Vezi [6].

[2]) Vezi [6].

Înălțimea \ Diametrul	Normale	Mărite	Total
Normale	239	60	299
Mărite	14	7	21
Total	253	67	320

unde normale sînt considerate cele cu caracteristicile în intervalele de toleranță și mărite cele cu caracteristicile în afara intervalelor de toleranță.

Se cere să se verifice dacă creșterile, față de dimensiunile admise, a înălțimii și a diametrului exterior sînt independente.

Soluție. Dacă cele două caracteristici intervin independent, numărul mediu al semifabricatelor care ar avea defecte ambele caracteristici ar trebui să fie:

$$\frac{21\times 67}{320}=4{,}4.$$

Potrivit datelor, 7 piese au ambele caracteristici mărite. Rămîne să probăm dacă acest fapt contrazice sau nu ipoteza independenței caracteristicilor. Verificarea o facem cu ajutorul criteriului χ^2, scris sub forma:

$$\chi^2=\frac{n\,(h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21})^2}{h_{10}h_{01}h_{20}h_{02}},$$

unde h_{ij} este numărul din coloana i și linia j, $h_{i0}=\sum_{j=1}^{l} h_{ij}$, $h_{0j}=\sum_{i=1}^{n} h_{ij}$ și n este numărul total de piese. Avem

$$\chi^2=\frac{320\,(239\times 7-14\times 60)^2}{253\times 67\times 21\times 299}=2{,}1.$$

Citind în tabela valorilor pentru χ^2 (vezi [6] tabela VIII) găsim că pentru un grad de libertate valoarea $\chi^2=2{,}1$ este mai mică decît valoarea $\chi^2=2{,}7$, dată în tabelă pentru un grad de libertate și pentru pragul de semnificație de 10%.

Putem trage concluzia că obținerea dimensiunilor mărite ale celor doi parametri (înălțimea și diametrul exterior) sînt independente.

19. Se dă distribuţia Poisson

$$f(x, \lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},$$

unde λ este un parametru. Se cere să se estimeze parametrul λ în baza faptului că în n experienţe am obţinut succesiv valorile x_1, $x_2, \ldots, x_n$ şi să se arate că $\bar{\lambda}$ este o estimaţie eficientă.

Soluţie. Funcţia de estimaţie o vom obţine din ecuaţia de verosimilitate maximă. Pentru a arăta că estimaţia obţinută este eficientă, trebuie să arătăm că eficienţa lui λ este egală cu 1, adică

$$e(\bar{\lambda})=1,$$

unde

$$e(\bar{\lambda})=\frac{\dfrac{1}{n\sum\limits_{x=0}^{\infty}\left[\dfrac{\partial \ln f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\right]^2 f(x, \lambda)}}{D^2(\bar{\lambda})}.$$

Ecuaţia verosimilităţii maxime este

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \lambda}=0, \tag{1}$$

unde

$$P=e^{-n\lambda}\cdot\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}.$$

Logaritmînd şi derivînd în raport cu λ, în baza egalităţii (1)' obţinem:

$$\ln P=-n\lambda+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i;$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \lambda}=-n+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{\lambda}=0;$$

$$\bar{\lambda}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

care este deci funcţia de estimaţie.

Pentru a dovedi eficienţa acesteia, să observăm că:

$$n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\partial \ln f(x;\lambda)}{\partial\lambda}\right]^2 f(x;\lambda)=n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}-1\right)^2\frac{\lambda^x e^{-x}}{x!}.$$

Ştim că distribuţia Poisson are următoarele momente:

$$M_1=\lambda,$$
$$M_2=\lambda^2+\lambda.$$

Deci

$$n\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}-1\right)^2\frac{\lambda^x e^{-x}}{x!}=n\left(\frac{1}{\lambda^2}M_2-\frac{2}{\lambda}M_1+1\right)=\frac{n}{\lambda}.$$

Insă dispersia mediei de selecţie este:

$$D^2(\lambda)=\frac{\lambda}{n}$$

şi deci estimaţia este eficientă.

20. Să se determine momentele mediei de selecţie $\bar{x}$ în funcţie de momentele teoretice.

Soluţie. Momentele teoretice sînt

$$M_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k dF(x).$$

Vom avea

$$\overline{M_1}=M(\bar{x})=M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i)=M_1,$$

$$\overline{M_2}=M(\bar{x}^2)=M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}M(x_i^2)+\frac{2}{n^2}\sum_{i\neq j}^{n}M(x_ix_j)=\frac{M_2}{n}+\frac{n-1}{n}M_1^2.$$

Dispersia mediei de selecţie rezultă imediat:

$$D^2(\bar{x})=M_2-M_1^2=\frac{M_2}{n}+\frac{n-1}{n}M_1^2-M_1^2=\frac{M_2-M_1^2}{n}.$$

21. Să se arate că dacă distribuţia teoretică este o distribuţie rectangulară în intervalul (0, 1), atunci media de selecţie admite o distribuţie a cărei funcţie de frecvenţă este

$$f(x)=\frac{n}{(n-1)!}\sum_{h=0}^{k\leqslant nx}(-1)^k C_n^k (nx-k)^{n-1}.$$

Soluţie. Funcţia caracteristică a distribuţiei teoretice este dată de

$$\int_0^1 e^{itx}\mathrm{d}x=\frac{e^{it}-1}{it},$$

iar funcţia caracteristică, corespunzătoare distribuţiei mediei de selecţie, este

$$\varphi(t)=M(e^{it\bar{x}})=\prod_{k=1}^{n}M\left(e^{i\frac{t}{n}x_u}\right)=\left(\frac{e^{i\frac{t}{n}}-1}{t\frac{t}{n}}\right)^2.$$

Folosind formula lui Fourier, putem scrie

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

şi deci

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\left(\frac{e^{i\frac{t}{x}}-1}{t\frac{t}{n}}\right)^n\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{n^n}{2\pi i^n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\frac{e^{\frac{itk}{n}}}{t^n}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{n^n}{2\pi i^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\left(\frac{k}{n}-x\right)t}}{t^n}\,\mathrm{d}t.$$

Însă,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^n}\mathrm{d}x=\begin{cases}-2\pi i^n\dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{dacă } a\leqslant 0\\ 0, & \text{dacă } a>0.\end{cases}$$

Prin urmare,

$$f(x)=\frac{n^n}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{k\leqslant nx}(-1)^{n-k+1}C_n^k\left(\frac{k}{n}-x\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}n^n}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{k\leqslant nx}(-1)^{n-k+1}C_n^k\left(x-\frac{k}{n}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{(-1)^n n}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{k\leqslant nx}(-1)^{n-k+1}C_n^k(nx-k)^{n-1}=$$

$$=\frac{n}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{k\leqslant nx}(-1)^{-k}C_n^k(nx-k)^{n-1}.$$

Dar

$$(-1)^{-k}=\frac{1}{(-1)^k}=(-1)^k$$

pentru orice k întreg, pozitiv sau nul şi deci

$$f(x)=\frac{n}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{k\leqslant nx}(-1)^k C_n^k(nx-k)^{n-1}.$$

22. Să se determine distribuţia mediei geometrice în estimaţia unei populaţii distribuite rectangular.

Soluţie. Ştim că densitatea de repartiţie a distribuţiei rectangulare este

$$\mathrm{d}F=\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x$$

pentru $0\leqslant x\leqslant a$, iar funcţia caracteristică corespunzătoare lui $\ln x$ este

$$\varphi(t)=\int_0^a x^{it}\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{a^{it}}{1+it}.$$

Atunci funcţia de repartiţie a lui $u=\ln x$ este dată de

$$f(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iut}a^{int}}{(1+it)^n}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(n\ln a-u)}}{(1+it)^n}\,\mathrm{d}t,$$

unde $n\ln a-u\geqslant 0$.

Integrala de mai înainte se calculează ca în exercițiul precedent. Obținem

$$f(u)=\frac{(n\ln a-u)^{n-1}e^{-(n\ln a-u)}}{\Gamma(n)}.$$

Notînd $z=e^{\frac{u}{n}}$, vom obține distribuția mediei geometrice:

$$f(z)=\frac{n^n z^{n-1}}{a^n\Gamma(n)}\left(\ln\frac{a}{z}\right)^{n-1}.$$

23. Să se arate că dacă distribuția teoretică este normală $N(m, \sigma)$, atunci distribuția mediei de selecție este de asemenea normală.

Soluție. Fie n numărul probelor. Să notăm cu $\bar{x}$ media de selecție. Folosind metoda funcției caracteristice, avem

$$\varphi(t)=M(e^{it\bar{x}})=M\left(e^{i\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}M\left(e^{i\frac{t}{n}x_k}\right).$$

Notînd $u=\frac{t}{n}$, obținem

$$\varphi(u)=\prod_{k=1}^{n}M(e^{iux_k}). \tag{1}$$

Se știe, însă, de la legea normală că

$$M(e^{iux_k})=e^{mui-\frac{\sigma^2u^2}{2}}$$

și deci că funcția caracteristică (1) este

$$\varphi(t)=e^{nmui-\frac{n\sigma^2u^2}{2}}$$

sau, ținînd seama că $u=\frac{t}{n}$, obținem

$$\varphi(t)=e^{mti-\frac{\sigma^2u^2}{2}}.$$

Aceasta, însă, este funcția caracteristică a unei distribuții normale $N\left(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Atunci și funcția de repartiție corespunzătoare este normală.

24. Să se arate că dacă distribuția teoretică este o distribuție Poisson cu parametrul λ, atunci distribuția mediei de selecție are ca funcție caracteristică expresia

$$\varphi(t) = e^{n\lambda\left(e^{i\frac{t}{n}}-1\right)}.$$

Soluție. Folosind, ca și mai înainte, metoda funcției caracteristice, avem

$$\varphi(t) = M(e^{it\bar{x}}) = \sum_{k=1}^{n} M\left(e^{i\frac{t}{n}x_k}\right).$$

Notînd $u = \frac{t}{n}$, obținem

$$\varphi(u) = \sum_{k=1}^{n} M(e^{iux}) = e^{n|u|}$$

sau

$$\varphi(t) = e^{n\left|\frac{t}{n}\right|} = e^{|t|}.$$

Știm, însă, că $e^{|t|}$ este funcția caracteristică a distribuției lui Cauchy.

25. Să se estimeze parametrul θ din distribuția Pearson de tipul III, a cărei densitate este

$$dF = \frac{x^{p-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(p)\,\theta^p}\,dx, \qquad 0 \leqslant x < \infty,$$

unde p este dat.

Soluție. Ne vom folosi de ecuația de verosimilitate maximă. Avem, lăsînd de o parte termenii independenți în θ,

$$\ln P = -\frac{1}{\theta}\sum x - np\ln\theta;$$

deci ecuația verosimilității maxime este

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta^2}\sum x - \frac{np}{\theta} = 0,$$

de unde rezultă că funcția de estimație este

$$\hat{\theta} = \frac{\sum x}{np} = \frac{\bar{x}}{p}.$$

Parametrul θ se poate estima cu ajutorul metodei momentelor. Vom pune condiția ca momentul de ordinul întîi să fie egal cu media empirică. Atunci, dacă $\bar{x}$ este media empirică,

$$\int_0^\infty x \cdot \frac{x^{p-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(p) \cdot \theta^p} dx = \bar{x}.$$

Deducem de aici

$$\frac{\theta}{\Gamma(p)} \int_0^\infty u^p e^{-u} du = \bar{x}, \quad \frac{\theta \Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} = \bar{x},$$

de unde

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{p}.$$

Variația este dată de

$$\frac{1}{\operatorname{Var} \hat{\theta}} = -nM\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right)$$

sau

$$\frac{1}{\operatorname{Var} \hat{\theta}} = -n \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{2x}{\theta^3} + \frac{p}{\theta^2}\right) f dx = -n\left(\frac{p}{\theta^2} - \frac{2p}{\theta^2}\right).$$

Deci

$$\operatorname{Var} \hat{\theta} = \frac{\theta^2}{np},$$

unde θ este valoarea exactă a parametrului.

26. Fie legile normale cu densitățile:

$$f(x;\ m,\ \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Considerînd m, apoi σ și în sfîrșit m și σ drept parametri, să se studieze dacă există un *rezumat exhaustiv* și care este ordinul minim al acestuia, în fiecare dintre cele trei cazuri.

Soluție. Spunem că densitatea $f(\theta, x)$, care depinde de parametrul θ, *are rezumat exhaustiv de ordinul minim* s *dacă*

$$\ln f(\theta; x) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j(\theta)\, a_j(x) + \beta(\theta) + b(x), \qquad (1)$$

unde α, β, a şi b sînt funcţii de θ sau de x şi care îndeplinesc condiţiile:

1) funcţiile $\alpha_j(\theta)$ sînt liniar independente;

2) funcţiile $a_j(x)$ sînt, de asemenea liniar independente;

3) funcţiile $\alpha_j(\theta)$, $a_j(x)$, $\beta(\theta)$ şi $b(x)$ sînt astfel, încît

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\theta;\ x)\,dx = 1,$$

oricare ar fi θ.

a) Să presupunem că σ este dat şi m este un parametru. Atunci

$$\ln f(x;\ m,\ \sigma) = \frac{mx}{\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma - \ln\sqrt{2\pi}; \qquad (*)$$

punînd

$$\alpha_1(m) = \frac{m}{\sigma^2}, \quad a_1(x) = x, \quad \beta(m) = -\frac{m^2}{2\sigma^2},$$

$$b(x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma - \ln\sqrt{2\pi},$$

obţinem o relaţie de forma (1) pentru $s=1$.

Rezultă că pentru parametrul m, avem un rezumat exhaustiv de ordinul minim $s=1$.

b) Să presupunem că m este dat şi σ un parametru; atunci

$$\ln f(x;\ m,\ \sigma) = -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma - \ln\sqrt{2\pi}.$$

Pentru $s=1$, să notăm cu

$$\alpha_1(\sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad a_1(x) = (x-m)^2,$$

$$\beta(\sigma) = -\ln\sigma - \ln\sqrt{2\pi}, \qquad b(x) = 0.$$

Se constată, ca mai sus, că există un rezumat exhaustiv relativ la σ de ordin minim 1.

c) Să presupunem că m şi σ sînt necunoscuţi; în acest caz, pentru ca să existe un rezumat exhaustiv de ordin minim $s(\geqslant 2)$ trebuie ca $f(x;\ m,\ \sigma)$ să fie de forma

$$\ln f(x,\ m,\ \sigma) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j(m,\ \sigma)\cdot a_j(x) + \beta(m,\ \sigma) + b(x), \qquad (2)$$

funcţiile din membrul al doilea verificînd condiţiile:

1) $\alpha_j(m,\ \sigma)$ (respectiv $a_j(x)$) sînt liniar independente,

2) oricare ar fi m şi σ, funcţiile α_j, β, a_j şi b, avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ m,\ \sigma)\,dx = 1.$$

Luînd în (*) $s=2$ şi notînd

$$\alpha_1(m,\ \sigma) = \frac{m}{\sigma^2}, \quad \alpha_2(m,\ \sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2},$$
$$a_1(x) = x, \quad a_2(x) = x^2,$$
$$\beta(m,\ \sigma) = \frac{m^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma - \ln\sqrt{2\pi}, \qquad b(x) = 0,$$

obţinem o formă (2) şi deci avem un rezumat exhaustiv de ordinul minim 2, relativ la parametrii m şi σ.

27. Fie familia de legi Poisson de parametru $\theta(\theta>0)$:

$$P(X=x) = p(\theta;\ x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Să se arate că există un rezumat exhaustiv de ordin minim $s=1$.

Soluţie. Sîntem în cazul unei legi discontinue

$$\ln p(\theta;\ x) = -\theta + x\ln\theta - \ln x!$$

Luînd $s=1$ şi notînd

$$\alpha_1(\theta) = \ln\theta, \quad a_1(x) = x,$$
$$\beta(\theta) = -\theta, \quad b(x) = -\ln x!,$$

se vede că avem un rezumat exhaustiv relativ la θ, de ordin minim $s=1$.

28. Fie familia de legi exponenţiale, depinzînd de un parametru θ,

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} \quad \text{cu} \quad \begin{pmatrix}\theta>0\\ x>0\end{pmatrix}.$$

Să se arate că există un rezumat exhaustiv relativ la θ, de ordin minim $s=1$.

Soluție. Avem

$$\ln f(x;\ \theta) = -\frac{x}{\theta} - \ln\theta;$$

luînd

$$a_1(x) = x, \quad \alpha_1(\theta) = -\frac{1}{\theta},$$

$$\beta(\theta) = -\ln\theta, \quad b(x) = 0,$$

obținem un rezumat exhaustiv de ordin minim $s=1$.

29. Să considerăm legile depinzînd de doi parametri $(m,\ \sigma)$

$$f(x;\ m,\ \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}|x-m|}{\sigma}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

(legi de tipul Laplace). Să se studieze rezumatele exhaustive relative la m, σ și $(m,\ \sigma)$.

Soluție. Logaritmînd, avem

$$\ln f(x;\ m,\ \sigma) = -\frac{\sqrt{2}|x-m|}{\sigma} - \ln(\sigma\sqrt{2}).$$

a) Dacă m este dat și σ un parametru, atunci există un rezumat exhaustiv relativ la σ de ordin minim $s=1$, deoarece se iau:

$$a_1(x) = -\sqrt{2}|x-m|, \quad \alpha_1(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$$

$$\beta(\sigma) = -\ln(\sigma\sqrt{2}), \quad b(x) = 0.$$

b) Dacă m este un parametru și σ dat sau dacă m și σ sînt parametri, nu există rezumate exhaustive, ceea ce se verifică imediat.

30. Fie

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}},$$

unde σ este constantă cunoscută și θ un parametru. Să se arate că există pentru θ o estimație fără erori sistematice.

Soluție. Dacă $f(x;\ \theta)$ se poate scrie sub forma

$$\ln f(x;\ \theta) = \beta'(\theta)\cdot(x-\theta) + \beta(\theta) + b(x),$$

unde β' este derivata în raport cu θ a funcției $\beta(\theta)$, $f(x, \theta)$ o densitate, atunci există o estimație a parametrului θ fără eroare sistematică.

În cazul de mai înainte, avem

$$\ln f(x; \theta) = -\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma \sqrt{2\pi}.$$

Notînd

$$\beta(\theta) = \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \quad \text{și} \quad b(x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma \sqrt{2\pi},$$

avem $\beta'(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}$ și

$$\ln f(x; \theta) = \frac{\theta}{\sigma^2} \cdot (x-\theta) + \frac{\theta^2}{2\sigma^2} + b(x) = \beta'(\theta) \cdot (x-\theta) + \beta(\theta) + b(x).$$

31. Se consideră familia de densități

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta \sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-m)^2}{2\theta^2}},$$

unde m este constantă dată, și θ un parametru pentru care se caută o estimație. Să se arate că nu există estimații pentru θ lipsite de erori sistematice.

Soluție. Se vede că pentru

$$\ln f(x; \theta)$$

nu se poate realiza o descompunere de forma

$$\ln f(x; \theta) = \beta'(\theta) \cdot (x-\theta) + \beta(\theta) + b(x)$$

cu $\beta'(\theta) = \frac{d\beta(\theta)}{d\theta}$ și deci parametrul θ nu admite o estimație fără eroare sistematică.

32. Într-un lot de 1000 piese se găsesc 4 piese defecte. Se face o selecție, fără repunere, de 60 piese. Care este probabilitatea ca în selecție să nu apară piesele defecte?

Soluție. Vom presupune că procesul se supune legii Poisson. Valoarea medie a pieselor defecte este:

$$a = \frac{4}{1000} = 0{,}004.$$

Volumul selecției fiind 60, între cele 60 de piese se află

$$\lambda = 0{,}004 \times 60 = 0{,}24$$

piese defecte. Aplicînd formula lui Poisson, avem

$$P = \frac{(0{,}24)^0 \cdot e^{-0{,}2}}{0!} = 0{,}819.$$

Calculînd probabilitatea după schema bilei nerevenite,

$$P = \frac{C_{996}^{60}}{C_{1000}^{50}} = 0{,}81.$$

Obținem cu ajutorul formulei lui Poisson aproximări ale probabilităților în cazul extracției nerepetate.

33. Dintr-o selecție ordonată de 12 piese, a căror caracteristică este înălțimea, s-au obținut următoarele date:

Nr. pieselor în ordinea creșterii înălțimii	1	2	3	4	5	6
Înălțimea în mm	31,50	31,60	31,65	31,70	32,20	32,40
Nr. pieselor în ordinea creșterii înălțimii	7	8	9	10	11	12
Înălțimea în mm	32,45	32,50	32,60	32,65	32,70	32,75

Se cere:

a) Să se calculeze următoarele funcții empirice de repartiție:

$$\bar{F}_{12}(30), \quad \bar{F}_{12}(32), \quad \bar{F}_{12}(32{,}5).$$

b) Să se calculeze momentele centrate de ordinul întîi, al doilea, al treilea și al patrulea.

Soluție. a) Avem

$$\bar{F}_n(x) = \frac{n_x}{n},$$

unde n_x este numărul valorilor din selecție, situate la stînga lui x, iar $n = 15$. Deci

$$F_{12}(30) = 0; \quad F_{12}(32) = \frac{4}{12}; \quad F_{12}(32{,}5) = \frac{7}{12}.$$

b) Ştim că momentul de ordinul r al selecţiei este dat de

$$\mu_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^r}{n}$$

unde c este valoarea iniţială, un număr arbitrar. Fie

$$c = 32{,}45.$$

Calculele auxiliare sînt date în tabela următoare:

Ordinea observaţiilor	x_i	$(x_i - c) \cdot 100 = y_i$	y_i^2	y_i^3	y_i^4
1	31,50	−90	8 100	−729 000	65 610 000
2	31,60	−85	7 225	−614 125	52 200 625
3	31,65	−80	6 400	−512 000	40 960 000
4	31,70	−75	5 625	−421 875	31 640 625
5	32,20	−25	625	−15 625	390 625
6	32,40	−5	25	−125	625
7	32,45	0	0	0	0
8	32,50	5	25	125	625
9	32,60	15	225	3 375	50 635
10	32,65	20	400	8 000	160 000
11	32,70	25	625	15 625	390 625
12	32,75	30	900	27 000	810 000
Total		−165	30 175	−2 238 625	192 214 375

Din această tabelă deducem:

$$b_1=-0{,}137;\quad b_2=0{,}251;\quad b_3=-0{,}186;\quad b_4=0{,}160.$$

b) Media aritmetică este egală cu

$$\bar{x}=32{,}45-0{,}137=32{,}313.$$

Pentru momentele centrate avem relațiile:

$$m_2=b_2-(\bar{x}-c)^2,$$

$$m_3=b_3-3m_2(\bar{x}-c)-(\bar{x}-c)^3,$$

$$m_4=b_4-4m_3(\bar{x}-c)-6m_2(\bar{x}-c)^2-(\bar{x}-c)^4.$$

34. Să se determine, cu o probabilitate de 0,96 limitele confidențiale ale dispersiei, pentru înălțimea pieselor din exercițiul precedent, presupunînd că repartiția pieselor este prin ipoteză normală.

Soluție. Am văzut că media aritmetică este

$$\bar{x}=32{,}313 \text{ mm}.$$

In baza formulei

$$s^2=\frac{\sum_{j=1}^{n} k_j(x_j-c)^2}{n}-(\bar{x}-c)^2,$$

unde $c=32{,}45$, obținem

$$12s^2=3{,}0175-(32{,}313-32{,}45)^2=3{,}0175-0{,}18769$$

sau

$$12s^2=2{,}82981 \text{ mm}^2.$$

In tabelele [1]) de valori ale repartiției χ^2, pentru $p=0{,}02$, $k=15-1=14$ grade de libertate, găsim că

$$\chi_1^2=26{,}9$$

și pentru $p=0{,}98$, $k=14$,

$$\chi_2^2=5{,}4.$$

Inegalitatea

$$\frac{ns^2}{\chi_1^2}<\sigma^2<\frac{ns^2}{\chi_2^2},$$

[1]) Vezi [6], tabela VIII.

ne va da

$$0{,}10<\sigma^2<0{,}52.$$

Deci, valorile lui σ^2, compatibile cu datele experienței, se află în intervalul (0,10; 0,52).

Observație. Estimația lui σ^2 dă în același timp intervalul confidențial

$$\left(\frac{\sqrt{n}s}{\chi_2},\ \frac{\sqrt{n}s}{\chi_1}\right)$$

pentru estimarea lui σ, cu aceeași probabilitate. Notînd-o pe aceasta prin $p=1-\alpha$, vom avea

$$P(z_1 s<\sigma<z_2 s)=p=1-\alpha,$$

unde $z_1=\frac{\sqrt{n}}{\chi_2}$ și $z_2=\frac{\sqrt{n}}{\chi_1}$. Aceste date se obțin din tabele.

De exemplu dacă $p=0{,}98$, cu datele problemei de mai sus,

$$\bar{x}=32{,}313 \text{ mm}$$

$$s^2=0{,}2358$$

și

$$s=0{,}45.$$

Rezultă că $P=1-\alpha=0{,}98$, de unde $\alpha=0{,}02$. Din tabela de valori χ^2, pentru $n=15$, rezultă

$$z_1=0{,}693;\quad z_2=1{,}733.$$

Deci valorile lui σ, compatibile cu datele de observație, sînt:

$$(0{,}693\times 0{,}45,\quad 1{,}733\times 0{,}45).$$

35. Fie dată o populație de 1000 de elemente cu dispersia $\sigma^2=4$. Să se calculeze volumul n al selecției pentru care se poate afirma cu o probabilitate de 0,999 că abaterile dintre valorile medii nu depășesc $\Delta=0{,}01$.

Soluție. Pentru populația dată, notăm cu $\bar{x}$ media și cu $\tilde{x}$ media de selecție. Se știe că $\tilde{x}$ este variabilă aleatoare cu repartiție normală, valoarea medie $\bar{x}$ și dispersia $\sigma_{\tilde{x}}$; atunci

$$P(\bar{x}-\Delta<\tilde{x}<\bar{x}+\Delta)=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\Delta}{\sigma_{\tilde{x}}}}^{\frac{\Delta}{\sigma_{\tilde{x}}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\tilde{x}}}\right).$$

Din tabela valorilor funcției $2\Phi(z)$, găsim că pentru 0,9990 corespunde $z=3{,}29$, deci

$$\frac{\Delta}{\sigma_{\tilde{x}}}=3{,}29.$$

Știind relațiile dintre dispersii,

$$\sigma_{\tilde{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$

avem

$$\frac{\Delta}{3{,}29}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$

de unde

$$\left(\frac{\Delta}{3{,}29}\right)^2\cdot n\,(N-1)=\sigma^2(N-n)$$

și

$$n=\frac{\sigma^2N}{\sigma^2+\left(\frac{\Delta}{3{,}29}\right)^2\cdot(N-1)}.$$

Înlocuind și celelalte valori, obținem

$$n=\frac{4\times1000}{4+\left(\frac{0{,}01}{3{,}29}\right)^2\cdot999}=\frac{4000}{4{,}008991}\approx997.$$

În cazul în care am presupune $N=\infty$, am avea nevoie de volumul

$$n=\frac{\sigma^2}{\left(\frac{\Delta}{3{,}29}\right)^2}\approx\frac{25}{0{,}009009}$$

care este mult mai mare decît cel precedent.

36. Într-o populație de 1000 de elemente se face o selecție de volum $n=818$. Știind că $\sigma^2=5$, să se găsească intervalul în care este cuprinsă abaterea dintre medie și media de selecție cu o probabilitate de 0,99730.

Soluție. Știm că

$$P(\bar{x}-\Delta<\tilde{\bar{x}}<\bar{x}+\Delta)=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\tilde{\bar{x}}}}\right).$$

Cum această probabilitate este 0,997, găsim că

$$\frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}}=3,$$

deci

$$\Delta=3\sigma_{\bar{x}}=3\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}.$$

Inlocuind, avem

$$\Delta=3\cdot\sqrt{\frac{5}{818}\cdot\frac{182}{999}}\approx 0{,}09,$$

deci abaterile dintre medii nu depăşesc 9%.

37. Dintr-un lot de 2500 piese a fost extrasă o probă de 200 piese. Înălţimea medie a unei piese este egală cu $\bar{x}=45{,}25$ mm, iar abaterea medie pătratică empirică $s=0{,}20$ mm.

Se cere să se compare abaterile medii pătratice $\sigma_{\bar{x}}$ cu media aritmetică, atît pentru o selecţie cu întoarcere cît şi pentru o selecţie fără întoarcere.

Soluţie. In cazul selecţiei cu întoarcere avem

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Deci

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{0{,}20}{\sqrt{200}}\approx 0{,}014.$$

In cazul selecţiei fără întoarcere obţinem

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}},$$

unde $N=2500$, $n=240$ şi deci

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{0{,}20}{200}\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{200}{2500}}{1-\frac{1}{2500}}}\approx 0{,}013.$$

Cele două abateri medii pătratice se compară procentual cu ajutorul coeficientului

$$1-\frac{\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{n}{N}}{1-\dfrac{1}{N}}}}{\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{n}{N}}{1-\dfrac{1}{N}}}}\times 100,$$

deci diferența dintre cele două aproximări ale abaterilor este aproximativ de 4%.

38. Să presupunem că măsurînd o mărime oarecare, constantă, am obținut datele din tabela următoare (din prima coloană).

x	$x-12$	$(x-12)^2$
12,15	0,15	0,0225
12,09	0,09	0,0081
12,06	0,06	0,0036
12,08	0,08	0,0064
12,12	0,12	0,0144
12,16	0,16	0,0256
12,13	0,13	0,0169
12,01	0,01	0,0001
Total	0,80	0,976

Se cere să se calculeze intervalul de încredere corespunzător mărimii a, pentru siguranța de 0,99 și 0,999.

Soluție. Intervalul de încredere este $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ cu $\varepsilon=t_\alpha s_{\bar{x}}$, unde t_α sînt date dintr-o tabelă, iar

$$s_{\bar{x}}^2=\frac{\sum_i (x-\bar{x})^2}{n(n-1)}.$$

În cazul nostru, avem

$$\bar{x}=12+\frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i-12)}{n}=12+\frac{0,8}{8}=12,1,$$

$$\bar{x}-12=0,1,$$

$$s_{\bar{x}}^2=0,0003 \quad \text{și} \quad s_{\bar{x}}=0,018.$$

Dacă $\alpha=0{,}99$, pentru $k=n-1=7$, obținem din tabelă

$$t_\alpha=3{,}499$$

și deci

$$\varepsilon=t_\alpha s_{\bar{x}}=0{,}063,$$

adică

$$12{,}037<a<12{,}163.$$

Dacă $\alpha=0{,}99$ găsim că

$$t_\alpha=5{,}405$$

și deci

$$\varepsilon=t_\alpha s_{\bar{x}}=0{,}097,$$

iar intervalul de încredere

$$12{,}003<a<12{,}197.$$

39. Se cere să se determine intervalul de încredere de 99% pentru estimarea mediei teoretice a diametrului a a axului unei piese, în baza unei probe de 8 piese prelucrate la un strung automat. Abaterile dimensiunilor acestor piese de la centrul cîmpului de toleranță sînt date în tabela următoare

Nr. piesei după ordine	1	2	3	4	5	6	7	8
Abaterile dimensiunilor x_i în μ . .	+1	+2	−1	+3	−2	+4	+5	+4

Soluție. Să calculăm media aritmetică $\bar{x}$ a selecției

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_i}{8}=\frac{16}{8}=2\,\mu.$$

Dispersia este

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}{n}=5{,}5$$

deci

$$s=2{,}6.$$

Vom determina intervalul de încredere pentru estimarea mediei folosind repartiția Student. Avem

$$P\left(\bar{x}-t_{1;7}\frac{s}{\sqrt{8-1}}<a<\bar{x}+t_{1;7}\frac{s}{\sqrt{8-1}}\right)=0{,}99,$$

de unde rezultă că

$$1-P=Q=1-0{,}99=0{,}01=1\%.$$

Din tabele, pentru $q=1\%$ și $k=n-1=8-1=7$, găsim $t_{1;7}=3{,}499$ sau

$$t_{1;7}\frac{s}{\sqrt{n-1}}=3{,}499\cdot\frac{2{,}6}{\sqrt{7}}=2{,}94$$

și deci

$$-0{,}94<a<4{,}94.$$

Așadar, valorile admisibile cu o siguranță de 99%, ale parametrului a, sînt situate în intervalul $(-0{,}94;\ 4{,}94)$.

40. Să presupunem că repartiția unor piese, după înălțime, este prin ipoteză normală, avînd abaterea medie pătratică $\sigma=0{,}2$ mm, și că s-a determinat printr-o selecție media aritmetică a înălțimii a 16 piese, care este $x_1=30{,}2$ mm.

Se cere să se calculeze intervalul de încredere corespunzător mediei teoretice a, pentru o siguranță $\gamma=0.95\%$.

Soluție. Din tabele găsim:

$$P_z=1-\gamma=1-0{,}95=0{,}05,\quad p=5,$$

$$z_p=\beta=1{,}96,\quad \alpha=-\beta=-1{,}96.$$

Intervalul de încredere este

$$x_1-\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}-\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

sau

$$30{,}2-1{,}96\,\frac{0{,}2}{16}<a<30{,}2+1{,}96\,\frac{0{,}2}{6},$$

ceea ce este echivalent cu inegalitatea

$$29{,}22<a<31{,}18.$$

Intervalul (29,22; 31,18) este, în cazul dat, intervalul de încredere căutat.

41. Se dă un lot de semifabricaţie de acelaşi tip, ce constituie producţia unui strung în 8 schimburi, repartizată astfel:

schimbul 1: 500 piese
schimbul 2: 400 piese
schimbul 3: 400 piese
schimbul 4: 500 piese
schimbul 5: 400 piese
schimbul 6: 300 piese
schimbul 7: 500 piese
schimbul 8: 500 piese

Total: 3500 piese

Din producţia fiecărui schimb au fost extrase selecţii egale, de 5%. Semifabricatele au fost măsurate după diametru şi pentru fiecare selecţie au fost calculate mediile aritmetice şi estimaţiile nedeplasate ale dispersiilor σ_j^2 după cum urmează:

Nr. schimbului	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
$\bar{x}_j$	32,25	32,40	32,57	32,46	32,51	32,35	32,30	32,35	—
σ_j^2	0,168	0,102	0,075	0,065	0,135	0,117	0,087	0,103	—
Volumul selecţiei n_j	25	20	20	25	20	15	25	25	$n=175$

Fiind dată, deci, o selecţie tipică, se cere să se determine după datele selecţiei media aritmetică şi dispersia mediei aritmetice.

Soluţie. Să notăm cu $\bar{x}_R$ media aritmetică a selecţiei. Avem

$$\bar{x}_R=\sum_{j=1}^{8}\bar{x}_j\frac{n_j}{n}.$$

Făcînd calculele, obţinem

$$\bar{x}_R=32{,}39 \text{ mm}.$$

Notînd cu $\sigma^2_{\bar{x}_R}$ dispersia mediei aritmetice a selecției, avem

$$\sigma^2_{\bar{x}_R} = \sum_{j=1}^{8} p_j^2 \frac{1-\frac{n_j}{N_j}}{1-\frac{1}{N_j}} \cdot \frac{\sigma_j^2}{n_j},$$

unde $p_j = \frac{N_j}{N}$ cu $N=3500$, iar N_j $(j=1, \ldots, 8)$ producția pe schimburi.

După calcule, obținem

$$\sigma_{\bar{x}_R} = 0{,}0023.$$

42. Se face o „selecție mare" de 150 piese din producția unui strung automat, formată din cinci probe independente de cîte 30 de piese (probe luate în anumite intervale de timp).

Să presupunem că abaterea medie generală de la dimensiunea nominală în întreaga selecție este $\bar{x}=1{,}50$ mm, iar abaterea medie pătratică empirică generală este $s=0{,}36$ mm.

Se cere să se estimeze cu un prag de semnificație de 5%, dacă discordanța dintre media aritmetică (cea mai mare în valoare absolută) a probei nr. 2, egală cu $\bar{x}_2 = 1{,}85$, și media aritmetică generală a întregii selecții este esențială.

Soluție. Să notăm cu

$$y_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}}{s}$$

abaterea relativă a mediei $\bar{x}_2$ a subgrupei, de la media generală $\bar{x}$. Se demonstrează că variabila

$$t = \frac{y_2 \sqrt{m(n-2)}}{\sqrt{n-m-my_2^2}}$$

urmează o lege Student cu $k=n-2$ grade de libertate.

În cazul nostru, avem

$$y_2 = \frac{1{,}85-1{,}60}{0{,}36} = \frac{0{,}25}{0{,}36} = 0{,}69,$$

iar $m=30$ și $n=150$; deci

$$t = \frac{0{,}69\sqrt{30(150-2)}}{\sqrt{150-30-30\cdot 0{,}692}} = 4{,}4.$$

Din tabele găsim, pentru $q=5\%$, $k=\infty$ (selecţia este mare) şi $k=150-2=148$ grade de libertate

$$t_{5;\infty}=1{,}96.$$

Deci media probei nr. 2 aparţine domeniului critic dat de inegalitatea

$$\bar{x}>t_q\frac{\sqrt{m(n-2)}}{\sqrt{n-m-y_2^2}}$$

şi de aceea ipoteza cu privire la omogenitatea mediilor probei nr. 2 şi a selecţiei întregi trebuie respinsă.

43. Fie n variabile aleatoare independente, care urmează fiecare legea normală cu parametrii (0,1). Atunci

$$dF=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\right\}dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Se cere estimaţia distribuţiei pentru

$$z=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

Soluţie. Pentru aceasta, trebuie să calculăm integrala multiplă

$$F=\int\cdots\int\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)dx_1\ldots dx_n$$

pe domeniul definit de

$$z=\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Să facem mai întîi următoarea schimbare de variabilă:

$$x_1=z^{\frac{1}{2}}\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-1},$$

$$x_2=z^{\frac{1}{2}}\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},$$

$$x_j=z^{\frac{1}{2}}\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-j}\sin\theta_{n-j+1},$$

$$x_n=z^{\frac{1}{2}}\sin\theta_1.$$

Jacobianul este

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(z; \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})} =$$

$$= \frac{1}{2} z^{\frac{n-2}{2}} \begin{vmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1} & \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1} & -\sin\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} & \cos\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1} & -\cos\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots \\ -\cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1} & \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Dînd în factor pe

$$\cos^{n-1}\theta_1 \cos\theta_2^{n-2} \ldots \cos\theta_{n-1} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1},$$

determinantul devine (lăsînd de o parte factorul amintit):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\operatorname{tg}\theta_1 & -\operatorname{tg}\theta_1 & \operatorname{cotg}\theta_1 \\ -\operatorname{tg}\theta_2 & -\operatorname{tg}\theta_2 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots \\ -\operatorname{tg}\theta_{n-2} & -\operatorname{tg}\theta_{n-2} & 0 \\ -\operatorname{tg}\theta_{n-1} & \operatorname{cotg}\theta_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd, obţinem

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(z, \theta_1, \ldots, \theta_n)} = \cos^{n-2}\theta_1 \cdot \cos^{n-3}\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2} \cdot \frac{1}{2} z^{\frac{n-2}{2}}$$

şi deci

$$\int \ldots \int \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}z} \frac{1}{2} z^{\frac{n-2}{2}} \cos^{n-2}\theta_1 \ldots \cos\theta_{n-2}\, dz\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1},$$

unde

$$0 < t < z, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Astfel,

$$F(z) = k \int_0^z e^{-\frac{1}{2}t} \cdot t^{\frac{n-2}{2}}\, dt,$$

$$1 = k \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{n-2}{2}}\, dz = k 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

În sfîrşit, vom obţine

$$dF=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{1}{2}z}z^{\frac{n-2}{2}}dz,$$

adică curba Pearson de gradul III.

44. Să considerăm un lanţ Markov, ale cărui probabilităţi de trecere sînt:

$$f(x,y;\alpha)=\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2}}dy.$$

Să se studieze dacă se poate găsi o estimaţie eficientă pentru α şi pentru α^2.

Soluţie. a) Pentru ca α să admită o estimaţie eficientă trebuie ca:

$$1)\ \ln f(x,y;\alpha)=\varphi'(\alpha)[A(x,y)-\alpha]+\varphi(\alpha)+B(x,y),$$

unde $A(x,y)$ şi $B(x,y)$ sînt două funcţii de x şi y, iar $\varphi(\alpha)$ o funcţie de α, care admite derivata $\varphi'(\alpha)$.

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty}e^{\varphi'(\alpha)[A(x,y)-\alpha]+\varphi(\alpha)+B(x,y)}dy=1.$$

În cazul nostru, avem

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2}}dy=1,$$

însă

$$\ln f(x,y;\alpha)=-\frac{(y-x)^2}{2\alpha^2}-\ln\alpha-\ln\sqrt{2\pi}.$$

Se vede că egalitatea (1) nu este îndeplinită. Deci nu putem găsi o estimaţie eficientă pentru α.

b) Să notăm $\alpha^2=\beta$. Avem

$$\ln f(x,y;\alpha)=-\frac{(y-x)^2}{2\beta}-\frac{1}{2}\ln\beta-\ln\sqrt{2\pi}.$$

Luînd $A(x,y)=(y-x)^2$, $B(x,y)=0$, şi $\varphi(\beta)=-\frac{1}{\beta}\ln\beta$, găsim

$$\ln f(x,y;\alpha)=\frac{1}{2\beta}((y-x)^2-\beta))-\frac{1}{2}\ln\beta+\left(\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2\pi}\right);$$

deci

$$\bar{\alpha}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2$$

este o funcție eficientă pentru α^2.

Pentru aceasta, mai trebuie să arătăm că avem

$$D^2(\bar{\alpha}(x_1, \ldots, x_n)) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{\partial \ln f(x_{i-1}, x_i; \alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}.$$

Să observăm că

$$\iint \ldots \int (\xi_i - \xi_{i-1})^2 \prod_{j=1}^{n} f(\xi_{j-1}, \xi_j;)\, d\xi_j =$$

$$= \iint \ldots \int \prod_{j=1}^{i-1} f(\xi_{j-1}, \xi_j; \alpha)\, d\xi_j\, (\xi_i - \xi_{i-1})^2 f(\xi_{i-1}, \xi_i; \alpha)\, d\xi_i = \alpha^2,$$

deoarece

$$\int (\xi_{i-1} - \xi_i)^2 f(\xi_{i-1}, \xi_i; \alpha)\, d\xi_i = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int (\xi_i - \xi_{i-1})^2 e^{-\frac{(\xi_i - \xi_{i-1})^2}{2\alpha^2}}\, d\xi_i = \alpha^2,$$

oricare ar fi valoarea lui ξ_{i-1}.

Rezultă, deci, că

$$\frac{1}{n} \iint \ldots \int \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1})^2 \prod_{j=1}^{n} f(\xi_{j-1}, \xi_j; \alpha)\, d\xi_j = \alpha^2$$

și prin urmare

$$D^2(\bar{\alpha}) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2\right) = \alpha^2.$$

Pe de altă parte,

$$\left[\frac{\partial \ln f(x_{i-1}, x_i; \alpha)}{\partial (\alpha^2)}\right] = \frac{1}{2\alpha^8}\left[(x_i - x_{i-1})^4 - 2\alpha^2 (x_i - x_{i-1})^2 + \alpha^4\right],$$

și, refăcînd calculul de mai înainte, obținem

$$\sum_{i=1}^{n} M\left[\frac{\partial \ln f(x_{i-1}, x_i; \alpha)}{\partial (\alpha^2)}\right]^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Deci

$$D^2(\bar{\alpha}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{f(x_{i-1}, x_i; \alpha)}{\partial (\alpha^2)}\right)^2}.$$

45. Fie A şi B două evenimente. Să se arate că:

a) Coeficientul de corelaţie dintre cele două evenimente se poate scrie

$$\rho=\frac{P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}}{\sqrt{(P_{11}+P_{21})(P_{12}+P_{22})(P_{11}+P_{12})(P_{21}+P_{22})}}.$$

b) $P_A(B)=P(B)+\rho\sqrt{\frac{P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}{P(A)}}$,

distribuţia evenimentelor A şi B fiind date în tabela următoare:

	B	$\bar{B}$	
A	$P_{11}=P(A\cap B)$	$P_{12}=P(A\cap\bar{B})$	$P_{11}+P_{12}=P_{1.}=P(A)$
$\bar{A}$	$P_{21}=P(\bar{A}\cap B)$	$P_{22}+P(\bar{A}\cap\bar{B})$	$P_{21}+P_{22}=P_{2.}=P(A)$

Soluţie. Fie A variabila X care ia valorile 0 şi 1 şi, analog, B o variabilă Y care ia aceleaşi valori.

Legea de distribuţie a variabilei XY este dată de:

X \ Y	1	0	
0	P_{11}	P_{12}	$P(x=1)=P_{11}+P_{12}=P_{1.}$
1	P_{21}	P_{22}	$P(x=0)=P_{21}+P_{22}=P_{2.}$
	$P(Y=1)=P_{11}+P_{21}=P_{.1}$	$P(Y=0)=P_{12}+P_{22}+P_{.2}$	$P(x=1)+P(Y=0)=1$ $P(Y=1)+P(Y=0)=1$

Rezultă imediat:

$$P_{1.}+P_{2.}=1,$$

$$P_{.1}+P_{.2}=1.$$

a) Ştim însă că

$$\rho=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}. \tag{1}$$

Dar

$$MX=P_{1.}\times 1+P_{2.}\times 0=P_{1.},$$

$$MY=P_{.1}\times 1+P_{.2}\times 0=P_{.1}$$

şi că

$$\sigma_x^2=(1-P_{1.})^2 P_{1.}+(0-P_{1.})^2 P_{2.}=$$

$$=P_{2.}^2 P_{1.}+P_{1.}^2 P_{2.}=P_{2.}P_{1.}(P_{2.}+P_{1.})=P_{2.}P_{1.}.$$

Deci

$$\sigma_x=\sqrt{P_{2.}P_{1.}}=\sqrt{(P_{21}+P_{22})(P_{11}+P_{12})}.$$

Analog,

$$\sigma_y=\sqrt{(P_{12}+P_{22})(P_{11}+P_{21})}.$$

Dar

$$M(XY)=P_{11}\times 1\times 1+P_{12}\times 1\times 0+P_{21}\times 0\times 1+P_{22}\times 0\times 0=P_{11}$$

şi

$$\mu_{xy}=\cos(XY)=M(XY)-MX-MY=$$

$$=P_{11}-P_{1.}P_{.1}=P_{11}-(P_{11}+P_{12})(P_{11}+P_{21})=$$

$$=P_{11}(P_{11}+P_{12}+P_{21}+P_{22})-(P_{11}+P_{12})(P_{11}+P_{21})=$$

$$=P_{11}P_{22}-P_{21}P_{12};$$

înlocuind în (1), rezultă expresia coeficientului de corelaţie.

b) Dacă înlocuim $P_{11}=P(A\cap B)$, ..., $P_{22}=P(\bar{A}\cap\bar{B})$ în expresia coeficientului de corelaţie, rezultă

$$\rho=\frac{P(A\cap B)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}}=[P_A(B)-P(B)]\cdot\sqrt{\frac{P(A)}{P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}},$$

de unde

$$P_A(B)=P(B)+\rho\sqrt{\frac{P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}{P(A)}}.$$

46. Să presupunem că avem următoarea tabelă de legătură pentru produsele cu ovalitatea (A) şi cele cu muchiile (B), obţinută prin observaţii date de o selecţie, conform tabelei următoare:

A \ B	B	$\bar{B}$	Suma
A	87	25	112
$\bar{A}$	22	15	37
Suma	109	40	149

Se cere să se estimeze gradul de legătură dintre aceste caracteristici de calitate ale producției.

Soluție. Din tabelă rezultă că $n_{11}=87$ sînt piese cu ovalitate și muchii, $n_{12}=25$ cu ovalitate dar fără muchii, $n_{21}=22$ fără ovalitate dar cu muchii și $n_{22}=15$ fără ovalitate și fără muchii. Să notăm

$$n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}=n.$$

Pentru a estima gradul de legătură dintre aceste caracteristici ne vom folosi de coeficientul de corelație

$$\rho=\frac{P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}}{(P_{11}+P_{21})(P_{12}+P_{22})(P_{11}+P_{12})(P_{21}+P_{22})},$$

unde P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} sînt probabilitățile diverselor combinații ale evenimentelor A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Estimația coeficientului ρ se obține înlocuind în formula de mai sus probabilitățile P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} prin frecvențele respective

$$\frac{n_{11}}{n},\ \frac{n_{12}}{n},\ \frac{n_{21}}{n},\ \frac{n_{22}}{n}$$

vom obține

$$\rho=\frac{n_{11}n_{12}-n_{12}n_{21}}{(n_{11}+n_{21})(n_{12}+n_{22})(n_{11}+n_{12})(n_{21}+n_{22})}.$$

Dacă volumul selecției este mare, pentru estimarea gradului de legătură dintre caracteristici ne folosim de faptul că $n\rho^2$ urmează aproximativ legea χ^2, cu un grad de libertate.

Utilizînd datele din tabelă obținem

$$\rho=0{,}186;$$

să aplicăm criteriul χ^2:

$$n\rho^2=5{,}15.$$

Din tabelă rezultă că valoarea 5,15 a lui χ^2, obținută pentru un grad de libertate, corespunde unui prag de semnificație egal, aproximativ, cu 3%.

Faptul că $\rho=0{,}186$ ne arată că legătura între cele două caracteristici este relativ slabă.

Rezultă că ipoteza că n-ar exista o legătură între produsele cu ovalitate și cu muchii nu este în contradicție cu observațiile.

47. Să presupunem că asupra nivelului mediu al unui rîu două stații hidrometeorologice fac 100 observații de-alungul unui

an (1 octombrie — 31 septembrie anul următor) și obțin datele în metri:

y \ x	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2	4,3	4,3	4,5	n_j
3,2	1	1										2
3,3		1	2		1							4
3,4			2	2	1	1						6
3,5			3	5	2	1	1	1				13
3,6			1	4	4	4	1	1	1			16
3,7			1	1	12	1	2					17
3,8				1	1	10	3		1			16
3,9		1			1	12	1		1		1	17
4,0										1	1	2
4,1										2	3	5
4,2								1		1		2
n_h.	1	3	9	13	22	29	8	3	3	4	5	100

a) Să se determine mediile condiționate, respectiv a lui y față de x și a lui x față de y.

b) Să se determine liniile de regresiune a lui y față de x și a lui x față de y, folosind metoda celor mai mici pătrate.

Soluție. a) Vom însemna cu $\bar{x}_y$ valoarea medie condiționată a lui x în raport cu valoarea y a celeilalte variabile:

y	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	4,0	4,1	4,2
$\bar{x}_y$	3,55	3,725	3,817	3,861	3,9	3,676	4,02	4,024	4,45	4,3

Valorile medii ale lui y condiționate de x le însemnăm cu $\bar{y}_x$ și formează tabela

x	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
$\bar{y}_x$	3,2	3,46	3,46	3,554	3,6	4,99	3,725	3,73	3,73	4,10	4,04

Observații. Valorile medii condiționate se calculează astfel:

$$\bar{x}_{3,6}=\frac{3,7+4\times 3,8+4\times 3,9+4\times 4,0+4,1+4,2+4,3}{16}$$

sau

$$\bar{x}_{y_h}=\frac{\sum_l n_{hl}x_l}{n_h}.$$

b) Ecuațiile liniilor de regresiune sînt:

$$\bar{y}_h=ax_h+b \quad \text{și} \quad \bar{x}_k=a'y_k+b',$$

unde vom determina direct coeficienții a, b; a', b' cu metoda celor mai mici pătrate.

Pentru coeficienții a, b avem ecuațiile:

$$a\sum_h x_h+nb=\sum_h y_h,$$

$$a\sum_h x_h^2+b\sum x_h=\sum_h x_h\cdot\bar{y}_h,$$

iar pentru coeficienții a', b' avem ecuațiile:

$$a'\sum_k y_k+nb'=\sum_k \bar{x}_k,$$

$$a'\sum_k y_k^2+b'\sum y_k=\sum \bar{x}_k y_k.$$

48. Pentru problema precedentă să se determine:

a) Mediile și dispersiile variabilelor x și y.

b) Coeficientul de corelație.

c) Coeficienții de regresiune.

Soluție. Calculul mediei și a dispersiei pentru variabila x:

x_h	n_h	x_h-a	$n_h(x_h-a)$	$n_h(x_h-a)^2$
3,5	1	−0,5	−0,5	0,25
3,6	3	−0,4	−1,2	0,48
3,7	9	−0,3	−2,7	0,81
3,8	13	−0,2	−2,6	0,52
3,9	22	−0,1	−2,2	0,22
a=4,0	29	0,0	0,0	0,00
4,1	8	0,1	0,8	0,08
4,2	3	0,2	0,6	0,12
4,3	3	0,3	0,9	0,27
4,4	4	0,4	1,4	0,64
4,5	5	0,5	2,5	1,25
	100		−3,0	4,44

$$\bar{x}=\frac{\sum_h n_h(x_h-a)}{n}+a=4-\frac{3}{100}=3{,}97,$$

$$\sigma_x^2=\frac{\sum_h n_h(x_h-a)^2}{n}-(\bar{x}-a)^2=\frac{4{,}44}{100}-(3{,}97-4{,}0)^2,$$

$$\sigma_x^2=0{,}0435,\quad \sigma_x=0{,}208.$$

Calculul mediei şi a dispersiei pentru variabila y:

y_k	$n_{\cdot k}$	y_k-a	$n_{\cdot k}(y-a)$	$n_{\cdot k}(y_k-a)^2$
3,2	2	−0,5	−1,0	0,50
3,3	4	−0,4	−1,6	0,64
3,4	6	−0,3	−1,8	0,54
3,5	13	−0,2	−2,6	0,52
3,6	16	−0,1	−1,6	0,16
b=3,7	17	0,0	0,0	0,00
3,8	16	0,1	1,6	0,16
3,9	17	0,2	3,4	0,68
4,0	2	0,3	0,6	0,18
4,2	2	0,5	1,0	0,50
	100		0,0	4,68

Avem:

$$\bar{y}=3{,}7;\quad \sigma_y^2=\frac{\sum_k n_{\cdot k}(y_k-a)^2}{n}-(\bar{y}-b)^2=\frac{4{,}68}{100}$$

şi

$$\sigma_y=\frac{2{,}16}{10}=0{,}216.$$

Scriem coeficientul de corelaţie sub forma $r=\frac{\mu_{11}}{\sigma_x\sigma_y}$, numărătorul μ_{11} fiind covariaţia lui x şi y.

Avem:

$$\mu_{11}=\frac{1}{n}\sum_{hk} n_{hk}(x_h-a)(y_k-b)-(\bar{x}-a)(\bar{y}-b)$$

sau încă, iterînd cele două sume,

$$\mu_{11}=\frac{1}{n}\sum_h n_{h\cdot}(x_h-a)(\bar{y}_h-b)-(\bar{x}-a)(\bar{y}-b),$$

unde y_h este valoarea medie condiţionată, a=4,0 şi b=3,7.

Pentru calculul lui μ_{11} formăm tabela

n_h.	x_h-a	$\bar{y}_h$	$\bar{y}_h-b$	$n_h.(x_h-a)(\bar{y}_h-b)$
1	−0,5	3,500	−0,200	0,1000
3	−0,4	3,500	−0,200	0,2400
9	−0,3	2,800	−0,500	1,3500
13	−0,2	3,554	−0,164	0,4264
22	−0,1	3,600	−0,100	0,2200
29	0,0	4,990	1,290	0,0000
8	0,1	3,725	0,025	0,0200
3	0,2	3,730	0,030	0,0180
3	0.3	3,730	0,030	0,0270
4	0,4	4,100	0,400	0,6400
5	0,5	4,040	0,440	1,1000
				4,1414

Rezultă

$$\mu_{11}=\frac{4,1414}{100}=0,0414$$

şi coeficientul de corelaţie r are valoarea

$$r=\frac{0,0414}{0,208\cdot 0,216}=0,92.$$

Dacă notăm cu ρ_{xy} şi ρ_{yx} coeficienţii de regresiune, avem

$$\rho_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad \text{şi} \quad \rho_{yx}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

sau încă

$$\rho_{xy}=\frac{\mu_{11}}{\sigma_y^2}, \quad \rho_{yx}=\frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2},$$

de unde

$$\rho_{xy}=0,88; \quad \rho_{yx}=0,95.$$

49. Studiindu-se răsucirea şi scurtarea unui fir crep de mătase s-au obţinut următoarele date:

Nr. măsurării	x_i torsiunea pe 50 cm	y_i scurtarea prin torsiune la o distanță de 25 cm între cleme	$x_i-\bar{x}'$	$y_i-\bar{y}'$	$(x_i-\bar{x}')^2$	$(y_i-\bar{y}')^2$	$(x_i-\bar{x}')(y_i-\bar{y}')$
1	1094	30,5	−36	−1,5	1296	2,25	54,0
2	1118	32,2	−12	0,2	144	0,04	− 2,4
3	1129	32,5	− 1	0,5	1	0,25	− 0,5
4	1144	32,6	14	0,6	196	0,36	8,4
5	1130	32,7	0	0,7	0	0,49	0,0
6	1095	31,8	−35	−0,2	1225	0,04	7,0
7	1144	33,7	14	1,7	196	2,89	23,8
8	1156	33,2	26	1,2	676	1,44	31,2
9	1146	34,0	16	2,0	256	4,00	32,0
10	1111	32,2	−19	0,2	361	0,04	3,8
	$X'=1127$	$Y'=32,54$	−33	5,4	4351	11,80	157,3

Se cere:

a) Să se calculeze coeficientul de corelație dintre torsiunea și scurtarea firului.

b) Să se studieze și existența corelației.

Soluție. a) Pentru calculul coeficientului de corelație avem:

$$\bar{x}=1130-3,3=1126,7$$

$$\bar{y}=32+0,54=32,54$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=4351-10\cdot(3,3)^2=4242$$

$$\sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2=11,80-10\,(0,54)^2=8,88$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})\,(y_i-\bar{y})=149,7-10\cdot(-3,3)\cdot(0,54)=16,75$$

și deci

$$r=\frac{167,5}{\sqrt{4242\times 8,88}}=0,86.$$

b) Să verificăm existența corelației. Avem $n=N-2=8$ și

$$t=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n}=4,77.$$

Din tabelele de corelaţie obţinem, pentru $n=2$ şi $t=3{,}35$,

$$s=99^0/_0.$$

Se poate deci conchide cu mai mult de $99^0/_0$ siguranţă că există o corelaţie reală ($4{,}77>3{,}35$).

50. Doi observatori fac 70 de măsurători asupra unei variabile continue. Rezultatele observaţiilor sînt:

y \ x	0—4	−8	−12	−16	−20	−24	−28	−32	−36	$n_{.l}$
0—4	1	3								4
−8	1	1	4							6
−12		5	6	1						12
−16			6	6	2					14
−20				4	3	5				12
−24					4	3	2			9
−28						1	1	3		5
−32							2	2	2	6
−36								1	1	2
n_h	2	9	16	11	9	9	5	6	3	70

Să se calculeze mediile $\bar{x}$, $\bar{y}$ şi dispersiile σ_x, σ_y.

Soluţie. Valorile medii se obţin din relaţiile:

$$\bar{x}=\frac{\sum_h n_{h.}(x_h-a)}{n}+a, \quad \bar{y}=\frac{\sum_k n_{.k}(y_k-b)}{n}+b,$$

unde

$$n=\sum_h n_{h.}=\sum_k n_{.k}$$

şi x_h şi y_k sînt mijloacele intervalelor.

Dispersiile se calculează cu ajutorul relaţiilor:

$$\sigma_x^2=\frac{\sum n_{h.}(x_h-a)^2}{n}-(\bar{x}-a)^2, \quad \sigma_y^2=\frac{\sum n_{.k}(y_k-b)^2}{n}-(\bar{y}-b)^2.$$

Pentru calculul mediei $\bar{x}$ şi σ_x avem:

n_h.	x_h	x_h-a	$n_{h.}(x_h-a)$	$n_{h.}(x_h-a)^2$
2	2	−16	− 32	512
9	6	−12	−108	1296
16	10	− 8	−128	1024
11	14	− 4	− 44	176
9	$a=18$	0	0	0
9	22	4	36	144
5	26	8	40	320
6	30	12	72	864
3	34	16	48	768
70			−116	5104

$$\bar{x}=18-\frac{116}{70}=16{,}343,$$

$$\sigma_x^2=\left(\frac{5104}{100}+\frac{4}{12}\right)-\left(\frac{116}{70}\right)^2,$$

$$\sigma_x\approx 7{,}0.$$

Pentru calculul mediei $\bar{y}$ şi abaterii σ_y avem:

$n_{.k}$	y_k	y_k-b	$n_{.k}(y_k-b)$	$n_{.k}(y_k-b)^2$
4	2	−16	−64	1024
6	6	−12	−72	864
12	10	− 8	−96	768
14	14	− 4	−56	224
12	$b=18$	0	0	0
9	22	4	36	144
5	26	8	40	320
6	30	12	72	864
2	34	16	32	512
70			−108	4720

$$\bar{y}=18-\frac{108}{70}\approx 16{,}458;\quad \sigma_y^2=\left(\frac{4730}{100}+\frac{4}{12}\right)-\left(\frac{108}{70}\right)^2;\quad \sigma_y\approx 7{,}0.$$

Observaţii. In σ_x^2, σ_y^2 termenul $\frac{4}{12}$ reprezintă corecţia Scheppard.

51. Pentru exerciţiul precedent să se calculeze coeficienţii de regresiune şi liniile de regresiune.

Soluție. Pentru calculul coeficienților de regresiune ρ_{xy} și ρ_{yx} vom calcula momentul mixt de ordinul 1, m_{11}.

Pentru o repartiție cu două dimensiuni cu densitatea de probabilitate $\rho(x, y)$, momentul mixt de ordinul 1 este dat de

$$m_{11}=\frac{\iint_D xy\rho(x, y)\,dxdy}{\iint_D \rho(x, y)\,dxdy}.$$

In cazul nostru, D este pătratul (fig. 26) de laturi $[0,36]$ și $[0,36]$ pe care punctele de diviziune $0<4<\ldots<36$ îl împart în pătratele d_{ij} pe care $\rho(x, y)$ ia valoarea n_{ij}. Atunci

$$m_{11}=\frac{\sum\limits_{ij}\iint\limits_{d_{ij}} xyn_{ij}dxdy}{\sum\limits_{ij}\iint\limits_{d_{ij}} n_{ij}dxdy}=\frac{\sum\limits_{ij} d_{ij}\,\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\,\frac{y_{j+1}+y_j}{2}\cdot n_{ij}}{\sum\limits_{ij} n_{ij}d_{ij}},$$

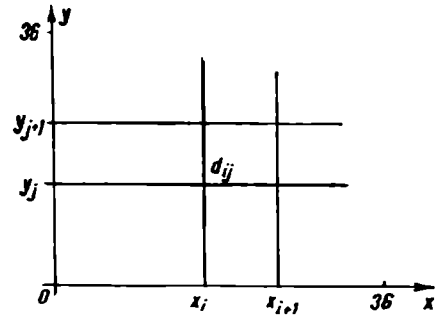

Fig. 26

unde aria pătratului d_{ij} am însemnat-o cu aceeași notație; cum toate subpătratele au aceeași arie, d_{ij} se simplifică și rămîne

$$m_{11}=\frac{\sum\limits_{ij}\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\cdot\frac{y_{j+1}+y_j}{2}n_{ij}}{\sum\limits_{ij} n_{ij}}.$$

Adică m_{11} se calculează ca și în cazul mediei luînd distribuția discretă cu masa plasată în mijloacele intervalelor. Formăm tabela cu repartiția discretă:

y \ x	−16 2	−12 6	−8 10	−4 14	0 18=a	4 22	8 26	12 30	16 34	n_i
2 −16	1_{256}	3_{192}								4
6 −12	1_{192}	1_{144}	4_{96}							6
10 − 8		5_{96}	6_{64}	1_{32}						12
14 − 4			6_{32}	6_{16}	2_0					14
b=18 0				4_0	3_0	5_0				12
22 4					4_0	3_{16}	2_{32}			9
26 8						1_{32}	1_{64}	3_{96}		5
30 12							2_{96}	2_{144}	2_{192}	6
34 16								1_{192}	1_{256}	2
4444	448	1200	860	128	0	80	320	768	640	70

(cu scriere mică sînt trecute produsele $x_i y_j$).

Pentru $\operatorname{cov}(x, y)=\mu_{11}$ găsim

$$\operatorname{cov}(x,y)=m_{11}-\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{4444}{70}-(\bar{x}-18)(\bar{y}-18)=\frac{4444}{70}-\frac{116\cdot 108}{70^2},$$

$$\mu_{11}=\operatorname{cov}(x,y)\approx 3{,}57.$$

Coeficientul de corelaţie este

$$\rho=\frac{\mu_{11}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}\approx 0{,}07.$$

Pentru coeficienţii de regresiune

$$\rho_{xy}=\frac{\mu_{11}}{\sigma_y^2} \quad \text{şi} \quad \rho_{yx}=\frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}$$

găsim:

$$\rho_{xy}=\frac{3{,}57}{50{,}99}=0{,}07; \quad \rho_{yx}=\frac{3{,}57}{45{,}25}=0{,}08.$$

Ecuaţiile liniilor de regresiune sînt:

$$\bar{y}_x-16{,}458=0{,}08\,(x-16{,}343),$$

$$\bar{x}_y-16{,}343=0{,}07\,(y-16{,}458).$$

Fie dată tabela de corelație între două variabile x și y

y \ x	3	4	5	6	7	8	9	10	$n_{i\cdot}$
1	1	2	2	1					6
2		3	4	7	1				15
3			4	5	6	1			16
4				3	3	2			18
5						2	1	2	5
$n_{\cdot j}$	1	5	10	16	10	5	1	2	50

52. Notînd ca de obicei $\bar{y}_x$ și $\bar{x}_y$ valorile medii condiționate, să se determine parabolele de regresiune:

$$\bar{y}_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

$$\bar{x}_y = b_0 + b_1 y + b_2 y^2.$$

Soluție. Vom determina parabolele de regresiune cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate. Ecuațiile care determină coeficienții parabolelor sînt soluțiile sistemului format cu derivatele parțiale ale funcției

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{h=1}^{n} (\bar{y}_x - a_0 - a_1 x_h - a_2 x_h^2)^2$$

în raport cu a_0, a_1, a_2, respectiv

$$n a_0 + a_1 \sum_{h=1}^{n} x_h + a_2 \sum_{h=1}^{n} x_h^2 = \sum_{h=1}^{n} \bar{y}_h,$$

$$a_0 \sum_h x_h + a_1 \sum_h x_h^2 + a_2 \sum_h x_h^3 = \sum_h \bar{y}_h x_h,$$

$$a_0 \sum_h x_h^2 + a_1 \sum_h x_h^3 + a_2 \sum_h x_h^4 = \sum_h \bar{y}_h x_h^2.$$

x_h	$\bar{y}_h$	$x_h\bar{y}_h$	x_h^2	$x_h^2\bar{y}_h$	x_h^3	x_h^4
3	1,0	3,00	9	9,0	27	81
4	1,6	6,40	16	25,6	64	256
5	2,2	11,00	25	55,0	125	625
6	2,625	15,75	36	94,5	216	1 296
7	3,2	22,40	49	166,8	343	2 401
8	4,2	33,60	64	268,8	512	4 096
9	5,0	45,00	81	405,0	729	6 561
10	5,0	50,00	100	500,0	1000	10 000
52	24,825	187,15	380	1524,7	3016	25 316

Sistemul de ecuaţii devine:

$$8a_0+52a_1+380a_2=24{,}825,$$
$$52a_0+380a_1+3016a_2=187{,}150,$$
$$380a_0+3016a_1+25\,315a_2=1524{,}700,$$

de unde se obţine:

$$a_0=0{,}994,\quad a_1=-0{,}115,\quad a_2=0{,}061.$$

Prima parabolă de regresiune este

$$\bar{y}_x=0{,}924-0{,}115x+0{,}061x^2.$$

Analog se obţine şi ecuaţia celeilalte parabole de regresiune.

53. Să presupunem că se dau trei variabile aleatoare: x ovalitatea bucşelor după o rectificare preliminară, y adaosurile în timpul rectificării finale, iar z ovalitatea după rectificarea finală; se mai dau următoarele date:

$$\bar{x}=0{,}045,\quad s_x=0{,}020,\quad r_{xz}=0{,}70,$$
$$\bar{y}=0{,}027,\quad s_y=0{,}062,\quad r_{yz}=0{,}42,$$
$$\bar{z}=0{,}018,\quad s_z=0{,}012,\quad r_{xy}=0{,}54.$$

Se cere să se calculeze ecuaţia de regresiune a lui Z faţă de X şi Y şi coeficienţii de corelaţie: $r_{z\cdot xy}$, $r_{x\cdot yz}$ şi $r_{y\cdot xz}$.

Soluţie. Se ştie că:

$$r_{z\cdot xy}=\sqrt{1-\frac{\bar{\Delta}}{\Delta_{33}}},$$
$$r_{x\cdot yz}=\sqrt{1-\frac{\bar{\Delta}}{\Delta_{11}}},$$
$$r_{y\cdot xz}=\sqrt{1-\frac{\bar{\Delta}}{\Delta_{22}}},$$

unde Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} sînt complementii algebrici ai elementelor celei de-a treia linii a determinantului $\overline{\Delta}$,

$$\overline{\Delta}=\begin{vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & 1 & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & 1 \end{vmatrix},$$

iar linia de regresiune este dată de

$$\frac{\hat{z}-\bar{z}}{s_z}=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{1-r_{xy}^2}\cdot\frac{x-\bar{x}}{s_x}+\frac{r_{yz}-r_{xy}r_{xz}}{1-r_{xy}^2}\cdot\frac{y-\bar{y}}{s_y}.$$

În cazul nostru, avem:

$$\overline{\Delta}=0{,}36,\quad \Delta_{33}=0{,}71,\quad \Delta_{31}=-0{,}47,\quad \Delta_{32}=-0{,}04,$$
$$\Delta_{11}=0{,}82,\quad \Delta_{22}=0{,}51.$$

Ecuația de regresiune se poate scrie

$$\hat{z}=0{,}40\,x+0{,}011\,y-0{,}019$$

și

$$r_{z.xy}=\sqrt{1-\frac{0{,}36}{0{,}71}}=0{,}70,$$
$$r_{x.yz}=0{,}75,$$
$$r_{y.xz}=0{,}54.$$

54. Nivelul unui rîu este măsurat în trei puncte distincte A_0, A_1, A_2; se notează observațiile punctului A_0 cu y, ale punctului A_1 cu x_1, și ale punctului A_2 cu x_2. Se obține următoarea tabelă de date:

y	x_1	x_2	n	y	x_1	x_2	n
3	5	10	3	10	15	18	10
3	5	10	2	10	15	18	10
5	5	10	1	12	18	18	5
6	7	15	7	12	18	20	1
9	10	15	4	15	20	20	1
10	15	15	5	15	20	20	1

Să se determine regresiunea lui y în raport cu perechea (x_1, x_2).

Soluție. Se știe că ecuația planului de regresiune a lui y față de x_1, x_2 este

$$y-\bar{y}=-\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\cdot\frac{D_{01}}{D_{00}}(x_1-\bar{x}_1)-\frac{\sigma_0}{\sigma_2}\cdot\frac{D_{02}}{D_{00}}(x_2-\bar{x}_2),$$

unde

$$D=\begin{vmatrix} 1 & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & 1 & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & 1 \end{vmatrix}$$

și

$$D_{00}=1-r_{12}^2,\quad D_{01}=-\begin{vmatrix} r_{01} & r_{02} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix},\quad D_{02}=\begin{vmatrix} r_{01} & r_{02} \\ 1 & r_{12} \end{vmatrix}$$

sau

$$D_{00}=1-r_{12}^2,\quad D_{01}=r_{21}r_{02}-r_{01},\quad D_{02}=r_{01}r_{12}-r_{02}.$$

Atunci

$$y-\bar{y}=-\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\cdot\frac{r_{21}r_{02}-r_{01}}{1-r_{12}^2}(x_1-\bar{x}_1)-\frac{\sigma_0}{\sigma_2}\cdot\frac{r_{01}r_{12}-r_{02}}{1-r_{12}^2}(x_2-\bar{x}_2),$$

unde trebuie să calculăm efectiv $\bar{y}$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, σ_0, σ_1, σ_2 și r_{12}, r_{01}, r_{02}. Pentru ușurință în calcule, vom nota:

$$u=y-9,\quad v_1=x_1-10,\quad v_2=x_2-15.$$

u	v_1	v_2	n	$\sum u$	$\sum uv_1$	$\sum uv_2$	$\sum u^2$	$\sum uv_1^2$	$\sum uv_2^2$	$\sum u^2v_1$	$\sum uv_1^2$	$\sum uv_1v_2$
−6	−5	−5	3	−18	−15	−15	108	75	75	90	90	75
−6	−5	−5	2	−12	−10	−10	72	50	50	60	60	50
−4	−5	−5	1	− 4	− 5	− 5	16	25	25	20	20	25
−3	−3	0	7	−21	−21	0	63	63	0	63	0	0
0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	0	5	5	25	0	5	125	0	25	0	0
1	5	0	10	10	50	0	10	250	0	50	0	0
1	5	0	10	10	50	0	10	250	0	50	0	0
1	5	0	10	10	50	0	10	250	0	50	0	0
3	8	3	5	15	40	15	45	320	45	120	45	120
3	8	3	1	3	8	3	9	64	9	24	9	24
6	10	5	1	6	10	5	36	100	25	60	30	50
6	10	5	1	6	10	5	36	100	25	60	30	50
			50	0	142	−2	410	1422	254	622	284	394

$$\bar{u}=0, \quad \bar{v}_1=\frac{124}{50}=2{,}84, \quad v_2=-\frac{5}{50}=-0{,}1,$$

$$\bar{y}=9, \quad \bar{x}_1=12{,}84, \qquad \bar{x}_2=14{,}9,$$

$$\sigma_u^2=\frac{410}{50}=8{,}2; \quad \sigma_{v_1}^2=\frac{1422}{50}-2{,}84^2=28{,}440-8{,}066=20{,}3740,$$

$$\sigma_{v_2}^2=\frac{254}{50}-0{,}01=5{,}07.$$

Rezultă de aici:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_1}=\sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_{v_1}^2}}=\sqrt{\frac{8{,}2}{20{,}374}}=\sqrt{0{,}4024}=0{,}63,$$

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_2}=\sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_{v_2}^2}}=\sqrt{\frac{8{,}2}{5{,}07}}=\sqrt{1{,}6173}=1{,}27.$$

Avem

$$\operatorname{cov}(u,\ v_1)=\frac{622}{50}-\bar{u}\cdot\bar{v}_1=12{,}45, \quad \operatorname{cov}(u_1,\ v_2)=\frac{284}{50}-\bar{u}\,\bar{v}_2=5{,}68,$$

$$\operatorname{cov}(v_1,\ v_2)=\frac{394}{50}-\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2=7{,}88+0{,}284=8{,}164;$$

coeficienţii r_{ij} au valorile:

$$r_{01}=r_{uv_1}=\frac{12{,}45}{2{,}86\cdot 4{,}51}=0{,}965,$$

$$r_{02}=r_{uv_2}=\frac{5{,}68}{2{,}86\cdot 2{,}25}=0{,}877,$$

$$r_{12}=r_{v_1v_2}=\frac{8{,}164}{4{,}51\cdot 2{,}25}=0{,}804.$$

Coeficienţii ecuaţiei de regresiune au valorile:

$$\frac{r_{01}-r_{02}r_{12}}{1-r_{12}^2}\cdot\frac{\sigma_0}{\sigma_1}=0{,}46,$$

$$\frac{r_{02}-r_{01}\cdot r_{12}}{1-r_{12}^2}\cdot\frac{\sigma_0}{\sigma_2}=0{,}36.$$

Ecuaţia planului de regresiune este

$$y-9=-0{,}46\,(x_1-12{,}84)-0{,}36\,(x_2-14{,}9).$$

55. In cazul exercițiului precedent, să se calculeze coeficientul de corelație R dintre variabila y și variabila $a_1x_1+a_2x_2$, unde a_1 și a_2 sînt coeficienții planului de regresiune a lui y în raport cu (x_1, x_2).

Soluție. Dacă notăm determinantul

$$D=\begin{vmatrix} 1 & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & 1 & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & 1 \end{vmatrix}$$

și cu

$$D_{00}=\begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix},$$

se știe că

$$R=\sqrt{1-\frac{D}{D_{00}}}.$$

Dacă dezvoltăm determinanții și ținem seama că

$$r_{ij}=r_{ji}, \qquad i\neq j$$

atunci

$$R=\sqrt{\frac{r_{01}^2-2r_{01}r_{12}r_{02}+r_{02}^2}{1-r_{12}^2}}.$$

Înlocuind valorile găsite în exercițiul precedent, avem

$$R=\sqrt{\frac{0{,}965^2-2\cdot 0{,}965\cdot 0{,}877\cdot 0{,}804+0{,}877^2}{1-0{,}804^2}}$$

și

$$R\approx 0{,}68.$$

56. Între anii 1946—1956 mortalitatea și natalitatea în R.P.R. este dată în tabela următoare:

Anul	Coeficient de natalitate	Coeficient de mortalitate	Anul	Coeficient de natalitate	Coeficient de mortalitate
1946	24,8	18,8	1951	25,1	12,8
1947	23,4	22,0	1952	24,8	11,7
1948	23,9	15,6	1953	23,8	11,6
1949	27,6	13,7	1954	24,8	11,5
1950	25,2	12,4	1955	25,6	9,7
			1956	24,2	9,9

Să se calculeze coeficientul de corelaţie a rangurilor prin metoda primului rang.

Soluţie. Pentru calculul coeficientului de corelaţie a rangurilor, se ordonează cele două serii de date după mărime:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots; \quad y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots$$

şi fiecărui termen din serie îi corespunde rangul pe care-l ocupă în această ordonare.

Dacă însă termenii consecutivi coincid,

$$x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_{i+k},$$

atunci convenim ca fiecărui termen al egalităţii să-i atribuim rangul i (metoda primului rang). Dacă v_i şi u_i sînt rangurile corespunzătoare valorilor din cele două serii şi N numărul total de termeni, coeficientul de corelaţie se calculează cu formula

$$\rho = 1 - 6\frac{\sum_i (v_i - u_i)^2}{N(N^2-1)}.$$

Pentru seriile noastre formăm tabela

Anii	Coeficient de natalitate	Coeficient de mortalitate	u_i	v_i	$(u_i - v_i)^2$
1946	24,8	18,8	5	10	25
47	23,4	22,0	1	11	100
48	23,9	15,6	3	9	36
49	27,6	13,7	11	8	9
50	26,2	12,4	10	6	16
51	25,1	18,8	8	7	1
52	24,8	11,7	5	5	0
53	23,8	11,6	2	4	4
54	24,8	11,5	5	3	4
55	25,6	9,7	9	1	64
56	24,2	9,9	4	2	4
					263

din care deducem

$$\rho = 1 - 6 \cdot \frac{263}{11 \times 120} \approx -0{,}2.$$

Acest coeficient pune în evidenţă o slabă corelaţie negativă a rangurilor.

57. Rezultatele observațiilor asupra a două variabile statistice x și y sînt date în tabela următoare:

	x	y		x	y
0—0,5	25,0	22,1	3,5—4,0	11,5	26,6
—1,0	11,5	27,4	—4,5	25,0	24,3
—1,5	39,1	27,2	—5,0	39,2	24,7
—2,0	11.5	22,1	—5,5	39,1	27,6
—2,5	37,7	28,8	—6,0	37,3	29,7
—3,0	37,3	27,3	—6,5	37,2	24,9
—3,5	11,5	27,3	—7,0	45,1	24,7

Să se determine coeficientul de corelație a rangurilor folosind metoda rangului mediu.

Soluție. Dacă între valorile $(x_i)_i$ avem egalitățile

$$x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_{i+k},$$

atunci convenim ca fiecăreia să-i dăm ca rang media aritmetică a rangurilor $\frac{i+(i+k)}{2}$.

Pentru determinarea coeficientului de corelație a rangurilor, aranjăm datele în tabela următoare:

	x_i	y_i	u_i	v_i	$(u_i-v_i)^2$
0—0,5	25,0	22,1	5,5	1,5	16
—1,0	11,5	27,4	2	11	81
—1,5	39,1	27,2	11,5	8	12,25
—2,0	11,5	22,1	2	1,5	0,25
—2,5	37,7	28,8	10	13	9
—3,0	37,3	27,3	8,5	9,5	1
—3,5	11,5	27,3	2	9,5	56,25
—4,0	11,5	26,6	2	7	25
—4,5	25,0	24,3	5,5	3	6,25
—5,0	39,2	24,7	13	4,5	72,25
—5,5	39,1	27,6	11,5	12	0,25
—6,0	37,3	29,7	8,5	14	30,25
—6,5	37,2	24,9	7	6	1
—7,0	45,1	24,7	14	4,5	90,25
					401,00

Deducem, pentru coeficientul de corelație, valoarea

$$\rho = 1 - 6\frac{401}{14 \times 195} = \frac{324}{2730}.$$

58. Pentru repartiţiile următoare

	x	y		x	y
1	51,5	14,6	7	40,9	22,5
2	57,7	17,7	8	39,2	22,5
3	54,5	22,5	9	24,0	30,4
4	51,5	25,4	10	51,5	22,5
5	48,0	33,0	11	57,7	17,7
6	51,4	14,6	12	41,5	14,6

să se calculeze coeficientul de corelaţie r şi coeficientul de corelaţie a rangurilor ρ şi să se compare cei doi coeficienţi cu ajutorul relaţiei

$$r=2\sin\frac{\pi}{6}\rho$$

(aproximare folosită pentru r atunci cînd variabilele x şi y au repartiţii normale).

Soluţie. Ştim că r are valoarea

$$r=\frac{\mu_{xy}-\mu_x\mu_y}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Pentru determinarea coeficienţilor întocmim tabela:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i	u_i	v_i	$(u_i-v_i)^2$
51,5	14,6	2 652,25	213,16	751,90	8	2	36
57,7	17,7	2 672,89	313,29	1021,29	11,5	4,5	49
54,5	22,5	2 970,25	506,25	1226,25	10,0	7,5	6,25
51.5	25,4	2 652,25	645,16	1308,10	8,0	10	4
48,0	33,0	2 304,00	1089,00	1584,00	5	12	49
51,4	14,6	2 641,96	213,16	750,44	6	2	16
40,9	22,5	1 672,25	506,25	920,25	3	7,5	20,25
39,2	22,5	1 536,64	506,25	882,00	2	7,5	30,25
24,0	30,4	576,00	921,16	729,60	1	11	100
51,5	22,5	2 652,25	506,25	1158,75	8	7,5	0,25
57,7	17,7	3 329,29	313,29	1021,29	11,5	4,5	49
41,5	14,6	1 722,25	213,16	605,90	4	2	4
569,4	258,0	27 382,84	5949,38	4959,77			371,00

Pentru repartiția dată, găsim

$$\bar{x}=47{,}45,\quad \bar{y}=21{,}5,\quad \sigma_x=5{,}51,\quad \sigma_y=5{,}80,$$

$$m_{11}=996{,}6475,$$

de unde deducem

$$r=-0{,}736.$$

Coeficientul de corelație a rangurilor este egal cu

$$\rho=1-6\cdot\frac{371}{12\times 120}=-0{,}545$$

și

$$2\sin\frac{\pi}{6}\rho=-0{,}579.$$

59. Care este probabilitatea ca un individ de vîrsta x să moară la o vîrstă între $(x+m)$ și $(x+m+1)$ ani.[1])

Soluție. Fie ${}_{m/m+1}q_x$ probabilitatea cerută. Să notăm cu $p(x, x+m)$ probabilitatea ca individul să trăiască la împlinirea vîrstei de $x+m$ ani și cu q_{x+m} probabilitatea ca să moară între vîrstele $(x+m)$ și $(x+m+1)$.

Se știe că

$$p(x, x+m)=\frac{l_{x+m}}{l_x}$$

și

$$q_{x+m}=\frac{l_{x+m}-l_{x+m+1}}{l_{x+m}},$$

unde l_x este funcția de supraviețuire. Deoarece

$${}_{m/m+1}q_x=p(x, x+m)\cdot q_{x+m},$$

rezultă că

$${}_{m/m+1}q_x=\frac{l_{x+m}-l_{x+m+1}}{l_x}. \tag{1}$$

Observație. Probabilitatea ca o persoană de vîrsta x să moară la o vîrstă cuprinsă între $(x+m)$ și $(x+n)$ ani $(n>m)$ va fi dată de

$${}_{m/n}q_x=p(x, x+m)\,q(x+m, x+n)$$

[1]) Vezi [21].

sau

$$ {}_{m/n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+n}}{l_x}. $$

Se vede că pentru $n = m+1$ regăsim probabilitatea (1).

60. Să notăm prin e_{xy} valoarea medie a timpului pe care-l trăiesc x şi y cît sînt amîndoi în viaţă, prin $e_{x\dot{y}}$ valoarea medie a timpului pe care x îl trăieşte după moartea lui y, prin $e_{\dot{x}y}$ valoarea medie a timpului pe care y îl trăieşte după moartea lui x, prin e_x şi e_y valorile medii ale timpului trăit de x respectiv de y.

Se cere să se calculeze aceste expresii şi să se arate ce relaţii există între ele.[1])

Soluţie. Valoarea medie a timpului trăit de x este

$$ e_x = -\int_0^\infty t \frac{e'_{x+t}}{e_x}\,dt. $$

Integrînd prin părţi, obţinem

$$ e_x = \int_0^\infty \frac{e_{x+t}}{e_x}\,dt. $$

In mod analog, avem

$$ e_y = \int_0^\infty \frac{e_{y+t}}{e_y}\,dt. $$

Valoarea medie e_{xy} este dată de:

$$ e_{xy} = -\int_0^\infty t \frac{e'_{x+t}}{e_x}\,\frac{e_{x+t}}{e_y}\,dt - \int_0^\infty \frac{e_{x+t}}{e_x}\cdot\frac{e'_{y+t}}{e_y}\,dt; $$

sau, integrînd prin părţi,

$$ e_{xy} = \int_0^\infty \frac{e_{x+t}}{e_x}\,\frac{e_{y+t}}{e_y}\,dt. $$

Să calculăm $e_{x\dot{y}}$; avem:

$$ e_{x\dot{y}} = \int_0^\infty \frac{e'_{y+t}}{e_y}\,dt \int_t^\infty (\tau - t)\frac{e'_{x+\tau}}{e_x}\,d\tau = \int_0^\infty \frac{e'_{y+t}}{e_y}\,dt \int_t^\infty \frac{e_{x+\tau}}{e_x}\,d\tau. $$

[1]) Vezi [21].

Analog,

$$e_{\dot{x}y} = \int_0^\infty \frac{e'_{x+t}}{e_x}\,dt \int_t^\infty \frac{e_{y+\tau}}{e_y}\,d\tau.$$

Integrînd prin părţi, avem:

$$e_{\dot{x}y} = \left[\frac{e_{y+t}}{e_y}\int_t^\infty \frac{e_{x+\tau}}{e_x}\,d\tau\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e_{y+t}}{e_y}\,\frac{e_{x+t}}{e_x}\,dt =$$

$$= \int_t^\infty \frac{e_{x+t}}{e_x}\,dt - \int_0^\infty \frac{e_{x+t}}{e_x}\,\frac{e_{y+t}}{e_y}\,dt.$$

Obţinem, deci, următoarele relaţii:

$$e_x = e_{xy} + e_{x\dot{y}}$$

şi analog

$$e_y = e_{xy} + e_{\dot{x}y}.$$

61. Se consideră m persoane de vîrstele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ani. Care este probabilitatea ca cel puţin r dintre aceste persoane să fie în viaţă peste N ani. [1])

Soluţie. Să enunţăm problema mai general, şi anume: Să presupunem că avem m evenimente $E_1, E_2, \ldots, E_m$, compatibile între ele. Probabilităţile de a se verifica, singre indiferent de faptul dacă celelalte s-au verificat sau nu, sînt respectiv $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Ne propunem să determinăm probabilitatea P, ca cel puţin r dintre aceste evenimente să se verifice.

Punînd condiţia ca cel puţin r evenimente să se verifice, vom avea cazuri favorabile cînd vor fi verificate respectiv r, $r+1$, $r+2$, $\ldots$, m dintre ele. Pentru a putea aplica principiul probabilităţii totale, să aranjăm toate cazurile posibile, astfel încît evenimentele să devină incompatibile.

Să observăm, mai întîi, că nu se pot verifica în acelaşi timp r şi $r+k$ evenimente. Prin urmare, ele constituie evenimente incompatibile.

Rezultă că P este egal cu suma probabilităţilor $P_r, P_{r+1}, \ldots, P_m$ de a se verifica respectiv $r, r+1, \ldots, m$ evenimente.

---

[1]) Vezi [21].

Insă,

$$P_r=\sum_1^m p_1p_2\dots p_r(1-p_{r+1})(1-p_{r+2})\dots(1-p_m),$$

$$P_{r+1}=\sum_1^m p_1p_2\dots p_{r+1}(1-p_{r+2})(1-p_{r+3})\dots(1-p_m),$$

$$P_{r+s}=\sum_1^m p_1p_2\dots p_rp_{r+1}\dots p_{r+s}(1-p_{r+s+1})\dots(1-p_m),$$

$$P_m=p_1p_2\dots p_m.$$

Să notăm $\sum_1^m P_1P_r\dots P_{r+s}=T_{r+s}$. Deoarece

$$P=P_r+P_{r+1}+\dots+P_m,$$

rezultă că

$$P=\alpha_rT_r+\alpha_{r+1}T_{r+1}+\dots+\alpha_{r+s}T_{r+s}+\dots+\alpha_mT_m,$$

unde α_r, α_{r+1}, $\dots$, α_m sînt nişte coeficienţi ce urmează să fie determinaţi.

Pentru aceasta este suficient să numărăm de cîte ori se cuprinde T_{r+s} în fiecare din probabilităţile P_r, P_{r+1}, $\dots$, P_m.

Observăm că T_{r+s} intră în P_{r+s} o singură dată şi cu semnul plus; în P_{r+s+1} de C_{r+s}^1 ori, însă cu semnul minus etc. Prin urmare,

$$\alpha_{r+s}=C_{r+s}^0-C_{r+s}^1+C_{r+s}^2+\dots+(-1)^sC_{r+s}^s.$$

Se ştie însă că

$$C_m^n-C_m^{n-1}+\dots+(-1)^nC_m^0=C_{m-1}^n$$

şi deci

$$\alpha_{r+s}=(-1)^sC_{r+s-1}^s,$$

de unde rezultă că

$$P=T_r-C_r^1T_{r+1}+$$

$$+C_{r+2}^2T_{r+2}+\dots+(-1)^sC_{r+s-1}^sT_{r+s}+\dots+(-1)^{m-r}C_{m-1}^{m-r}T_m. \quad (1)$$

Să notăm acum cu

$${}_nP\,\frac{(r)}{x_1x_2\dots x_m}$$

probabilitatea ca cel puţin r dintre persoanele (x_1), (x_2), $\dots$, (x_m) să trăiască după trecerea a n ani.

Presupunînd că $E_1, E_2, \ldots, E_m$ reprezintă evenimentele ca persoanele $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ să trăiască după n ani, probabilităţile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ coincid respectiv cu ${}_np_{x_1}$, ${}_np_{x_2}$, ..., iar produsele de forma ${}_np_{x_1}$, ${}_np_{x_2}, \ldots, {}_np_{xr}$ cu ${}_np_{x_1x_2\ldots x_r}$ şi deci

$$T_{r+s} = \sum_1^m {}_np_{x_1x_2\ldots x_{r+s}}.$$

Aplicînd formula (1)

$${}_np_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = \sum_1^m {}_np_{x_1x_2\ldots x_r} - C_r^1\,{}_np_{x_1x_2\ldots x_{r+1}} + \ldots +$$

$$+(-1)^s C_{r+s-1}^s \sum_1^m {}_np_{x_1x_2\ldots x_{r+s}} + \ldots + (-1)^m\,{}_np_{x_1x_2\ldots x_m}.$$

Observaţii. 1) Dacă $r=1$, obţinem:

$${}_np_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = \sum_1^m {}_np_{x_1x_2\ldots x_r} - \sum_1^m {}_np_{x_1x_2\ldots x_{r+1}} + \ldots +$$

$$+(-1)^s \sum_1^m {}_np_{x_1x_2\ldots x_{r+s}} + \ldots + (-1)^m\,{}_np_{x_1x_2\ldots x_m}.$$

2) Dacă $r=m$, avem:

$${}_np_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = {}_np_{x_1x_2\ldots x_m}.$$

62. Se dă un grup de m persoane de vîrstele $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Care este condiţia ca probabilitatea de supravieţuire a acestui grup peste t ani să fie egală cu probabilitatea unui grup de m persoane de vîrsta x, oricare ar fi t [1]).

Soluţie. Dacă notăm cu $\frac{l_{xi+t}}{l_{x_i}}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ probabilitatea de supravieţuire a unei persoane de vîrsta x_i avem, conform enunţului problemei:

$$\frac{l_{x_1+t}}{l_{x_1}} \cdot \frac{l_{x_2+t}}{l_{x_2}} \cdot \frac{l_{x_3+t}}{l_{x_3}} \cdots \frac{l_{x_m+t}}{l_{x_m}} = \left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right)^m$$

[1]) Vezi [21].

sau

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{l_{x_i+t}}{l_{x_i}} = F(x,t),$$

unde am notat

$$\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right)^m = F(x,t).$$

Pentru a generaliza această problemă, să determinăm legile de mortalitate pentru care avem:

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{l_{x_i+t}}{l_{x_i}} = F(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ t), \tag{1}$$

unde n este un număr întreg şi mai mic decît m, iar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt variabile independente.

Aplicînd logaritmii şi derivînd în raport cu t, din relaţia (1) obţinem

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{l'_{x_i+t}}{l_{x_i+t}} = \frac{F'(y_1, y_2, \ldots, y_n; t)}{F(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ t)}. \tag{2}$$

Ţinînd seama că intensitatea de moarte este dată de

$$\mu_y = \frac{l'_y}{l_z}$$

şi notînd

$$-\frac{F'(y_1, y_2, \ldots, y_n; t)}{F(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ t)} = G(y_1, y_2, \ldots, y_n; t)$$

egalitatea (2) devine:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{x_i+t} = G(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ t).$$

Pentru $t = 0$, această egalitate ca şi derivatele de ordinul $1, 2, \ldots, n$ (în raport cu t), ne dau:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{x_i} = G(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ 0),$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu'_{x_i} = G'(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ 0)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu^{(n)}_{x_i} = G^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ 0).$$

Aceste ecuații ne dau $n+1$ funcții de m variabile $x_1, x_2, \ldots, x_m$, care depind de n variabile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n>m)$. Rezultă că determinantul funcțional, luat în raport cu $(n+1)$ variabile x_i,

$$\begin{vmatrix} \mu'_{x_1} & \mu'_{x_2} & \vdots & \mu'_{x_{n+1}} \\ \mu''_{x_1} & \mu''_{x_2} & \vdots & \mu''_{x_{n+1}} \\ \cdots\cdots\cdots & & \vdots & \cdots\cdots \\ \mu^{(n+1)}_{x_1} & \mu^{(n+1)}_{x_2} & \vdots & \mu^{(n+1)}_{x_{n+1}} \end{vmatrix}$$

trebuie să fie nul. De aici rezultă, însă:

$$a_0\mu_{x_i}+a_1\mu'_{x_i}+\ldots+a_n\mu^{(n+1)}_{x_i}=0$$

$$(i=1, 2, \ldots, n, n+1).$$

Se observă ușor că oricare ar fi grupul de $(n+1)$ variabile x_i, coeficienții $a_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$ rămîn aceiași.

Într-adevăr, dacă egalăm cu zero determinantul de mai sus și dezvoltăm după ultima coloană, rezultă că oricare ar fi x_{n+1}, coeficienții $a_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$, abstracție făcînd de un factor constant, sînt aceiași, deoarece se exprimă în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ecuația diferențială de mai înainte este, deci, satisfăcută, oricare ar fi x_i și putem scrie:

$$a_0\mu_x+a_1\mu'_x+\ldots+a_n\mu^{(n+1)}_x=0.$$

Această condiție este și suficientă.

Problema de mai sus este *problema lui Quiquet*.

Observații. 1) Dacă ecuația diferențială de mai înainte este de ordinul al doilea

$$a_0\mu''_x+a_1\mu'_x=0,$$

notînd

$$-\frac{a_0}{a_1}=a,$$

prin integrare, obținem

$$\mu'_x=ce^{ax},$$

unde c este o constantă. O nouă integrare ne dă

$$\mu_x=\frac{c}{a}e^{ax}+b,$$

unde b este o altă constantă.

Aceasta este *intensitatea de moarte* din aşa numita *lege Gompertz-Makeham* sau din *cazul Gompertz* dacă b este nul. Quiquet numeşte prima lege şi *lege de ordinul întîi.*

2) Dacă ecuaţia diferenţială este de ordinul al treilea, avem

$$a_0\mu_x' + a_1\mu_x'' + a_2\mu_x''' = 0. \tag{3}$$

Notînd

$$\frac{a_0}{a_2} = p, \quad \frac{a_1}{a_2} = q,$$

se ştie că integrarea ecuaţiei diferenţiale (3) depinde de soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Dacă rădăcinile acestei ecuaţii, λ_1 şi λ_2, sînt distincte şi diferite de zero, avem

$$\mu_x' = c_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + c_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x},$$

unde c_1 şi c_2 sînt două constante arbitrare.

Printr-o nouă integrare obţinem

$$\mu_x = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x} + c_3.$$

Această lege mai poartă numele de legea de mortalitate a lui Lazarus.

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, obţinem

$$\mu_x' = [\lambda c_2 + (\lambda x + 2)c_3]\lambda e^{\lambda x},$$

iar

$$\mu_x = c_1 + [\lambda c_2 + (\lambda x + 1)c_3]e^{\lambda x}.$$

Dacă $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = \lambda \neq 0$, obţinem

$$\mu_x' = 2c_2 + c_3\lambda^2 e^{\lambda x}$$

şi

$$\mu_x = c_1 + 2c_2 x + c_3\lambda e^{\lambda x}.$$

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, obţinem imediat că

$$\mu_x = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2.$$

63. Un asigurat de x ani va primi, dacă este în viaţă la împlinirea vîrstei de y ani, suma de A lei. Dacă moare înainte de împlinirea vîrstei de y ani, urmaşii lui primesc suma de B lei [1]).

[1]) Vezi [21].

În acest scop, asiguratul plătește o sumă anuală P până la împlinirea vîrstei de y ani, sau până la moarte, dacă aceasta survine înainte de împlinirea vîrstei de y ani.

Se cere să se calculeze suma P și rezerva matematică după t ani $(t<y-x)$.

Soluție. Calculul primei. Sîntem în prezența a două asigurări. Prima asigurare constă în acordarea sumei de A lei asiguratului de vîrsta x, care va fi în viață la împlinirea vîrstei de y ani. Valoarea actuală a acestei asigurări este:

$$A_{y-x}E_x = A\frac{D_y}{D_x}, \tag{1}$$

unde $D_x = {}_xv^x$ și $v = \frac{1}{1+i}$, i fiind procentul de fructificare considerat în calcule, iar l_x funcția de supraviețuire din tabela de mortalitate.

A doua asigurare constă în plata sumei de B lei la moartea asiguratului de vîrsta x, dacă aceasta survine înainte de împlinirea vîrstei de y ani. Valoarea ei actuală este

$$B_{|y-x}A_x = B\frac{M_x - M_y}{D_x}, \tag{2}$$

unde

$$M_x = \sum_{x=0}^{\infty} C_x \quad \text{iar} \quad C_x = (l_{x+1} - l_x)\, v^{x+\frac{1}{2}}.$$

Valoarea actuală a primelor plătite de asigurat este dată de relația

$$P_{|y-x}a_x = P\frac{N_x - N_y}{D_x}, \tag{3}$$

unde

$$N_x = \sum_{x=0}^{\infty} D_x.$$

Ecuația fundamentală a asigurării se obține egalînd valoarea medie actuală a sumelor plătite de asigurat cu valoarea medie actuală a sumelor încasate de asigurat. Avem, prin urmare:

$$P_{|y-x}a_x = A_{y-x}E_x + B_{|y-x}A_x,$$

de unde rezultă

$$P=\frac{AD_y+B(M_x-M_y)}{N_x-N_y}.$$

Calculul rezervei matematice. Să notăm prin $R_{x,t}$ $(t<y-x)$ valoarea rezervei matematice după t ani.

Prin definiție, *rezerva matematică este egală cu diferența dintre valoarea medie a sumelor pe care le va primi asiguratul și valoarea medie a sumelor pe care le va plăti asiguratul.*

Intrucît asiguratul are peste t ani vîrsta de $x+t$ ani, obligația (1) *devine:*

$$A_{y-x-t}E_{x+t}=A\frac{D_y}{D_{x+t}} \tag{1'}$$

obligația (2) devine:

$$B_{y-x-t}\,A_{x+t}=B\frac{M_{x+t}-M_y}{D_{x+t}} \tag{2'}$$

iar obligația (3):

$$P_{|y-x-t}a_{x+t}=P\frac{N_{x+t}-N_y}{D_{x+t}}, \tag{3'}$$

de unde rezultă că rezerva matematică este:

$$R_{x,t}=(1')+(2')-(3')=\frac{AD_y+B(M_{x+t}-M_y)-P(N_{x+t}-N_y)}{D_{x+t}}.$$

64. O persoană de x ani se asigură în următoarele condiții:

1) dacă este în viață la împlinirea vîrstei de y ani $(y>x)$ primește A lei;

2) asiguratul plătește o primă anuală P pînă la data morții sau cel mult pînă la împlinirea vîrstei de y ani;

3) la data morții lui, dacă aceasta survine înainte de împlinirea vîrstei de y ani, urmașii lui primesc o sumă egală cu totalitatea sumelor plătite de asigurat.

Se cere să se calculeze valoarea primei și a rezervei matematice după t ani.[1])

[1]) Vezi [21].

Soluție. Calculul primei. Se plătește suma de A lei după $y-x$ ani, dacă asiguratul de vîrsta x este în viață; valoarea medie actuală a acestei plăți este

$$A_{y-x}E_x=\frac{D_y}{D_x}. \tag{1}$$

Valoarea primei de asigurat, plătibilă de către instituția de asigurare, este

$$P_{|y-x}(IA)_x=P\frac{R_x-R_y-(y-x)M_x}{D_x}, \tag{2}$$

iar valoarea medie a primelor anuale plătite de asigurat este

$$P_{|y-x}a_x=P\frac{N_x-N_y}{D_x}. \tag{3}$$

Ecuația fundamentală a asigurării este

$$A_{y-x}E_x+P_{|y-x}(IA)_x=P_{|y-x}a_x,$$

de unde rezultă că

$$P=\frac{AD_y}{N_x-N_y-R_x+R_y+(y-x)M_x}.$$

Calculul rezervei matematice. Asiguratul avînd după t ani vîrsta $x+t$ ani, mărimile (1), (2) și (3) devin:

$$A_{y-x-t}E_{x+t}=A\frac{D_y}{D_{x+t}}, \tag{1'}$$

$$P_{|y-x-t}(IA)_{x+t}=P\frac{R_{x+t}-R_y-(y-x-t)M_{x+t}}{D_{x+t}}, \tag{2'}$$

$$P_{|y-x-t}a_{x+t}=P\frac{N_{x+t}-N_y}{D_{x+t}}. \tag{3'}$$

Rezerva matematică este

$$R_{x,t}=(1')+(2')-(3')=\frac{AD_y+P(R_{x+t}-R_y-(y-x-t)M_{x+t}-N_{x+t}+N_y)}{D_{x+t}}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. *E. Borel*, Sur les probabilités denombrables et leurs applications aritmétiques, Rend. del Cir. Mat. di Palermo, 1909, t. 27.
2. *E. Borel, R. Delthell*, Probabilités—Erreurs. Collection Armand Colin, 1923.
3. *H. Cramer*, Mathematical methods of Statistics, Princeton, 1946.
4. *А. М. Длин*, Математическая статистика в технике, Советская Наука, 1951.
5. *J. L. Doob*, Stochastic Processes, New-York—London, 1953.
6. *I. V. Dunin-Barkovski* şi *N. V. Smirnov*, Teoria probabilităţilor şi statistica matematică. Partea generală (traducere din limba rusă), Acad. R.P.R., Inst. de Studii Romîno-Sovietic, 1958.
7. *В. Феллер*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИХЛ, Москва, 1952.
8. *R. Fortet, A. Blanc-Lapierre*. Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.
9. *Б. В. Гнеденко*, Курс теории вероятностей, Издание второе, ГИТТЛ, Москва, 1954.
10. *N. M. Günther, R. O. Cuzmin*, Culegere dé probleme (traducere din limba rusă), vol. III, Editura Tehnică, Bucureşti, 1950.
11. *П. Халмош*, Теория меры, НХЛ, Москва, 1953.
12. *M. G. Kendall*, The advanced theory of Statistics, London, 1948.
13. *M. G. Kendall*, Exercises in Theoretical statistics, London, 1954.
14. *Dj. H. Lening, R. G. Bettin*, Random Processes in automatic control, New-York—Toronto—London, 1956.
15. *M. Loève*, Étude asymptotique des sommes des variables aléatoires liées, Journal de Math. pures et appl., 1954, t. 24.
16. *Gh. Mihoc*, Elemente de calculul probabilităţilor, Bucureşti, Editura Tehnică, 1954.
17. *O. Onicescu, Gh. Mihoc*, Sur une généralisation d'urne de Bernoulli, Bul. de l'Ec. polyt., Bucureşti, 1935—1937, t. VI.
18. *O. Onicescu, Gh. Mihoc*, Les chaînes des variables aléatoires. Problèmes asymptotiques, Et. et Rech. Acad. Roumaine, 1943, t. XIV.
19. *O. Onicescu, Gh. Mihoc*, Lecţii de Statistică matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.
20. *O. Onicescu*, Calculul probabilităţilor, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.
21. *O. Onicescu, Gh. Mihoc, C. T. Ionescu-Tulcea*, Calculul probabilităţilor şi aplicaţii, Editura Academiei R.P.R., Bucureşti 1956.
22. *A. Rényi*, Valószinüségszámitás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

23. *В. Романовский*, Математическая статистика, ГОНТИ НКТП, СССР, 1938.

24. *Т. А. Сарымсаков*, Основы теории процессов Маркова, ГИТТЛ, Москва, 1954.

25. *Е. С. Вентцель*, Теория вероятностей, Г. И. Ф. М. Л., Москва, 1958.

26. *Em. Parzen*, Modern Probability Theory and its applications, New-York—London, 1960.

27. *M. Fréchet*, Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités, t. I-II, Paris, 1938.

28. *А. М. Яглом*, Введение в теорию стационарных случайных функций. Успехи математических наук, Том VII — 5 (51), 1952.

29. *A. M. Iaglom* şi *I. M. Iaglom*, Probleme neelementare tratate elementar, (traducere din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1962.

30. *K. L. Chung*, Markov chains with stationary transition probabilities, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.

TABLA DE MATERII

Prefață 3

Cap. I Cîmpuri finite. Cîmpuri numerabile. Probabilități geometrice 5

Cap. II Legi de repartiție. Compunerea legilor de repartiție. Repartiții cu mai multe dimensiuni 72

Cap. III Momente. Dispersii. Invarianți. Corelație. Funcții generatoare 126

Cap. IV Funcțiile caracteristice ale repartițiilor uzuale. Funcții de tip pozitiv 189

Cap. V Convergența șirurilor de variabile aleatoare 229

Cap. VI Lanțuri Markov. Procese staționare. Corelația și densitatea spectrală a proceselor stochastice 277

Cap. VII Statistică matematică (Valori medii. Dispersii. Corecții. Mediana. Moda. Corelații. Selecții) 328

Bibliografie 413

Control științific : Prof. univ. MIHOC GHEORGHE
Redactor responsabil : TEODORESCU CLOTILDA
Tehnoredactor : GORUN ELLY

Dat la cules : 24.02.1962. Bun de tipar : 16.05.1962. Apărut 1962. Tiraj : 1200+140+25 legate. Hîrtie semivelină de 65 g/m², 610×860/16. Coli editoriale 22,50. Coli de tipar 26. A. 0457/1962. C. Z. pentru bibliotecile mari 519.2(076). C. Z. pentru bibliotecile mici 519.

Tiparul executat sub comanda nr. 1671 la Întreprinderea Poligrafică Timișoara, str. Popa Șapcă nr. 8. — R.P.R.